LA GRAN ILUSIÓN

LAS GRANDES OBRAS DE ALBERT EINSTEIN

EDICIÓN DE

STEPHEN HAWKING

CRÍTICA

LA GRAN ILUSIÓN

Las grandes obras de Albert Einstein

Edición de
STEPHEN HAWKING

CRÍTICA
BARCELONA

Primera edición: noviembre de 2010
Primera edición en esta nueva presentación: enero de 2016

La gran ilusión
Edición de Stephen Hawking

Título original: A stubbornly persistent illusion

Av. Diagonal, 662-664, 08034 Barcelona (España)
Crítica es un sello editorial de Editorial Planeta, S. A.

editorial@ed-critica.es
www.ed-critica.es

ISBN: 978-84-9892-910-2
Depósito legal: B. 28.352 - 2015
2015. Impreso y encuadernado en España por Huertas Industrias Gráficas S. A.

1

SOBRE LA ELECTRODINÁMICA DE LOS CUERPOS EN MOVIMIENTO*

Es bien sabido que, cuando se aplica a cuerpos en movimiento, la electrodinámica de Maxwell tal como hoy se entiende normalmente conduce a asimetrías que no parecen ser inherentes a los fenómenos. Tomemos, por ejemplo, la interacción electrodinámica entre un imán y un conductor. Aquí los fenómenos observables dependen sólo del movimiento relativo del conductor y el imán, mientras que la visión habitual traza una nítida distinción entre los dos casos, en donde o bien uno u otro de los dos cuerpos está en movimiento. Pues, en efecto, si el imán está en movimiento y el conductor está en reposo, en la vecindad del imán aparece un campo electromagnético con una energía definida que produce una corriente dondequiera que haya localizados elementos del conductor. Pero si el imán está en reposo mientras que el conductor está en movimiento, no hay ningún campo eléctrico en la vecindad del imán, sino más bien una fuerza electromotriz en el conductor a la que no corresponde ninguna energía per se, sino que, suponiendo una igualdad del movimiento relativo en los dos casos, da lugar a corrientes eléctricas de la misma magnitud y el mismo curso que las producidas por las fuerzas eléctricas en el primer caso.

* «Elektrodynamik bewegter körper», *Annalen der Physik*, 17, 1905.

Ejemplos de este tipo, junto con los infructuosos intentos de detectar un movimiento de la Tierra con relación al «medio lumínico», llevan a la conjetura de que ni los fenómenos de la mecánica, ni tampoco los de la electrodinámica tienen propiedades que correspondan al concepto de reposo absoluto. Más bien, las mismas leyes de la electrodinámica y la óptica serán válidas para todos los sistemas de coordenadas en los que rigen las ecuaciones de la mecánica, como ya se ha demostrado para cantidades de primer orden. Elevaremos esta conjetura (cuyo contenido será denominado en adelante «el principio de relatividad») al estatus de un postulado e introduciremos también otro postulado, que es sólo aparentemente incompatible con él, a saber, que la luz se propaga siempre en el espacio vacío con una velocidad definida V que es independiente del estado de movimiento del cuerpo emisor. Estos dos postulados bastan para conseguir una electrodinámica de cuerpos en movimiento simple y consistente basada en la teoría de Maxwell para cuerpos en reposo. La introducción de un «éter lumínico» se mostrará superflua, puesto que la idea que se va a desarrollar aquí no requerirá un «espacio en reposo absoluto» dotado de propiedades especiales, ni asigna un vector velocidad a un punto del espacio vacío donde están teniendo lugar procesos electromagnéticos.

Como toda la electrodinámica, la teoría que va a desarrollarse aquí está basada en la cinemática de un cuerpo rígido, puesto que las afirmaciones de una teoría semejante tienen que ver con las relaciones entre cuerpos rígidos (sistemas de coordenadas), relojes y procesos electromagnéticos. Una consideración insuficiente de esta circunstancia está en la raíz de las dificultades con las que debe enfrentarse actualmente la electrodinámica de los cuerpos en movimiento.

A. PARTE CINEMÁTICA

1. DEFINICIÓN DE SIMULTANEIDAD

Consideremos un sistema de coordenadas en el que son válidas las ecuaciones mecánicas de Newton. Para distinguir nominalmente dicho sistema de aquellos que van a introducirse más tarde, y para hacer esta presentación más precisa, le llamaremos «sistema de reposo».

Si una partícula está en reposo con respecto a este sistema de coordenadas, su posición relativa al último puede determinarse por medio de varas de medir rígidas utilizando los métodos de la geometría euclidiana y expresarse en coordenadas cartesianas.

Si queremos describir el *movimiento* de una partícula, damos los valores de sus coordenadas como funciones del tiempo. Sin embargo, debemos tener en cuenta que una descripción matemática de este tipo sólo tiene sentido físico si tenemos ya claro lo que entendemos aquí por «tiempo». Debemos tener en cuenta que todos nuestros juicios que implican al tiempo son siempre juicios sobre *sucesos simultáneos*. Si, por ejemplo, yo digo que «El tren llega aquí a las 7 en punto», eso significa, más o menos, «La manecilla pequeña de mi reloj apuntando a las 7 y la llegada del tren son sucesos simultáneos».[1]

Podría parecer que todas las dificultades implicadas en la definición de «tiempo» podrían superarse si sustituyo «posición de la manecilla pequeña de mi reloj» por «tiempo». Semejante definición es suficiente si va a definirse un tiempo exclusivamente para el lugar en el que está localizado el reloj; pero la definición ya no es satisfactoria cuando tienen que enlazarse temporalmente series de

1. No discutiremos aquí la imprecisión inherente al concepto de simultaneidad de dos sucesos que tienen lugar en la misma posición (aproximadamente), lo que sólo puede ser eliminado mediante una abstracción.

sucesos que ocurren en localizaciones diferentes, o —lo que es equivalente— cuando hay que evaluar temporalmente sucesos que ocurren en lugares remotos del reloj.

Por supuesto, podríamos contentarnos con evaluar el tiempo de los sucesos estacionando en el origen de las coordenadas a un observador con un reloj; este observador asigna a cada suceso a evaluar la posición correspondiente de las manecillas del reloj cuando a través del espacio vacío le llega una señal luminosa procedente de dicho suceso. Sin embargo, sabemos por experiencia que una coordinación semejante tiene el inconveniente de que no es independiente de la posición del observador con el reloj. Llegamos a un arreglo más práctico mediante el siguiente argumento.

Si existe un reloj en el punto A en el espacio, entonces un observador situado en A puede evaluar el tiempo de los sucesos en la inmediata vecindad de A hallando las posiciones de las manecillas del reloj que son simultáneas con dichos sucesos. Si existe otro reloj en el punto B que se asemeja en todos los aspectos al que hay en A, entonces el tiempo de los sucesos en la inmediata vecindad de B puede ser evaluado por un observador en B. Pero no es posible comparar el tiempo de un suceso en A con uno en B sin una estipulación adicional. Hasta aquí hemos definido sólo un «tiempo-A» y un «tiempo-B», pero no un «tiempo» común para A y B. El último puede ahora determinarse estableciendo por definición que el «tiempo» requerido por la luz para viajar de A a B es igual al «tiempo» que requiere para viajar de B a A. En efecto, supongamos que un rayo de luz parte de A hacia B en un «tiempo-A» t_{A}, es reflejado desde B hacia A en un «tiempo-B» t_B, y llega de nuevo a A en un «tiempo-A» t'_A. Los dos relojes son síncronos por definición si

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Suponemos que es posible que esta definición de sincronicidad esté libre de contradicciones, y que lo esté para puntos en número arbitrario, y por consiguiente son válidas en general las relaciones siguientes:

1. Si el reloj en *B* marcha de forma síncrona con el reloj en *A*, el reloj en *A* marcha de forma síncrona con el reloj en *B*.
2. Si el reloj en *A* marcha de forma síncrona con el reloj en *B* así como con el reloj en *C*, entonces los relojes en *B* y *C* también marchan de forma síncrona uno con relación al otro.

Por medio de ciertos experimentos (mentales) físicos hemos establecido lo que debe entenderse por relojes síncronos en reposo relativo y situados en diferentes lugares, y con ello hemos llegado obviamente a definiciones de «síncrono» y «tiempo». El «tiempo» de un suceso es la lectura obtenida simultáneamente de un reloj en reposo situado en el lugar del suceso, que para todas las determinaciones temporales marcha de forma síncrona con un reloj especificado en reposo y, por supuesto, con el reloj especificado.

Basados en la experiencia, estipulamos además que la cantidad

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

es una constante universal (la velocidad de la luz en el espacio vacío).

Es esencial que hayamos definido el tiempo por medio de relojes en reposo en el sistema de reposo; puesto que el tiempo recién definido está relacionado con el sistema en reposo, le llamaremos «el tiempo del sistema de reposo».

2. SOBRE LA RELATIVIDAD DE LONGITUDES Y TIEMPOS

Las consideraciones siguientes están basadas en el principio de relatividad y el principio de constancia de la velocidad de la luz. Definimos estos dos principios como sigue:

1. Si los dos sistemas de coordenadas están en movimiento relativo de traslación, paralela uniforme, las leyes de acuerdo con las cuales cambian los estados de un sistema físico no dependen de con cuál de los dos sistemas están relacionados dichos cambios.
2. Todo rayo luminoso se mueve en el sistema de coordenadas «de reposo» con una velocidad fija *V*, independientemente de si este rayo luminoso es emitido por un cuerpo en reposo o en movimiento. Por lo tanto,

$$\text{velocidad} = \frac{\text{recorrido de la luz}}{\text{intervalo de tiempo}}$$

donde «intervalo de tiempo» debería entenderse en el sentido de la definición dada en la sección 1.

Tomemos una vara rígida en reposo; sea l su longitud, medida por una vara de medir que está también en reposo. Imaginemos ahora que se coloca el eje de la vara a lo largo del eje X del sistema de coordenadas en reposo, y que la vara es puesta entonces en movimiento de traslación paralela uniforme (con velocidad v) a lo largo del eje X en la dirección de las x crecientes. Preguntamos sobre la longitud de la vara de medir, que imaginamos debe establecerse por las dos operaciones siguientes:

a) El observador se mueve junto con la mencionada vara de medir y la vara rígida susceptible de ser medida, y mide la longitud de esta vara tendiendo la vara de medir de la misma manera que si la vara susceptible de ser medida, el observador y la vara de medir estuvieran en reposo.
b) Utilizando relojes en reposo y síncronos en el sistema de reposo como se esbozó en la sección 1, el observador determina en qué puntos del sistema de reposo están situados el principio y el final de la vara susceptible de ser medida en algún tiempo t dado. La distancia entre estos dos puntos, medida con la vara utilizada antes —pero no en reposo—, es también una longitud que podemos llamar la «longitud de la vara».

De acuerdo con el principio de relatividad, la longitud determinada por la operación (*a*), que llamaremos «la longitud de la vara en el sistema en movimiento», debe ser igual a la longitud l de la vara en reposo.

La longitud determinada utilizando la operación (*b*), que llamaremos «la longitud de la vara (en movimiento) en el sistema de reposo», será determinada sobre la base de nuestros dos principios, y encontraremos que difiere de l.

La cinemática actual supone implícitamente que las longitudes determinadas por las dos operaciones anteriores son exactamente iguales entre sí, o, en otras palabras, que en el tiempo t un cuerpo rígido en movimiento es totalmente reemplazable, en cuanto a su geometría, por el *mismo* cuerpo cuando está *en reposo* en una posición concreta.

Además, imaginamos los dos extremos (A y B) de la vara provistos de relojes que son síncronos con los relojes del sistema de reposo, i. e., cuyas lecturas corresponden siempre al «tiempo del sistema de reposo» en las localizaciones que los relojes resultan ocupar; por lo tanto, estos relojes son «síncronos en el sistema de reposo».

Imaginemos además que cada reloj tiene un observador que se mueve con él, y que estos observadores aplican a los dos relojes el criterio para el ritmo síncrono de dos relojes formulado en la sección 1. Sea un rayo de luz que parte de *A* en el tiempo[2] t_A, es reflejado en *B* en el tiempo t_B, y llega de nuevo a *A* en el tiempo t'_A. Teniendo en cuenta el principio de relatividad de la velocidad de la luz, encontramos que

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

y

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v}$$

donde r_{AB} denota la longitud de la vara en movimiento, medida en el sistema de reposo. Los observadores que se mueven conjuntamente con la vara encontrarían así que los dos relojes no marchan de forma síncrona, mientras que los observadores en el sistema de reposo les dirían que están marchando de forma síncrona.

Vemos así que no podemos atribuir significado absoluto al concepto de simultaneidad; en su lugar, dos sucesos que son simultáneos cuando son observados desde algún sistema de coordenadas concreto ya no pueden considerarse simultáneos cuando son observados desde un sistema que está en movimiento relativo a dicho sistema.

2. «Tiempo» aquí significa tanto «tiempo del sistema en reposo» como «la posición de las manecillas del reloj en movimiento localizado en el lugar en cuestión».

3. TEORÍA DE LAS TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS Y TIEMPO DESDE EL SISTEMA DE REPOSO A UN SISTEMA EN MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN UNIFORME RELATIVO A AQUÉL

Sean dos sistemas de coordenadas en el espacio en «reposo», i.e., dos sistemas de tres líneas rectas materiales rígidas mutuamente perpendiculares con origen en un punto. Sean coincidentes los ejes X de los dos sistemas, y sean sus ejes Y y Z respectivamente paralelos. Cada sistema estará provisto de una vara de medir rígida y un número de relojes, y sean exactamente iguales las dos varas de medir y todos los relojes de los dos sistemas.

Ahora, pongamos el origen de uno de los dos sistemas, digamos k, en un estado de movimiento con velocidad (constante) v en la dirección de las x crecientes del otro sistema (K), que permanece en reposo; e impartamos esta nueva velocidad a los ejes coordenados de k, su correspondiente vara de medir y sus relojes. A cada tiempo t del sistema de reposo K corresponde una localización definida de los ejes del sistema en movimiento. Por razones de simetría tenemos justificación para suponer que el movimiento de k puede ser tal que en el tiempo t («t» siempre denota un tiempo del sistema de reposo) los ejes del sistema en movimiento son paralelos a los ejes del sistema de reposo.

Imaginemos ahora el espacio a ser medido tanto desde el sistema de reposo K, utilizando la vara de medir en reposo, como desde el sistema k, utilizando la vara de medir en movimiento junto con él, y que de este modo se obtienen las coordenadas x, y, z y ξ, η, ζ, respectivamente. Además, por medio de los relojes en reposo en el sistema de reposo, y utilizando rayos luminosos como se describe en la sección 1, determinamos el tiempo t del sistema de reposo para todos los puntos donde hay relojes. De manera similar, aplicando de nuevo el método de señales luminosas descrito en la sección 1, determinamos el tiempo t del sistema en movimiento para todos los puntos de este sistema en movimiento en los que hay relojes en reposo relativo a este sistema.

A cada conjunto de valores x, y, z, t que determina por completo el lugar y tiempo de un suceso en el sistema de reposo le corresponde un conjunto de valores ξ, η, ζ, τ que fija el suceso relativo al sistema k, y el problema que hay que resolver ahora es encontrar el sistema de ecuaciones que conecta dichas cantidades.

En primer lugar, es evidente que estas ecuaciones deben ser lineales debido a las propiedades de homogeneidad que atribuimos al espacio y el tiempo.

Si hacemos $x' = x - vt$, entonces es evidente que a un punto en reposo en el sistema k le pertenece un conjunto de valores x', y, z definido e independiente del tiempo. Determinamos primero τ como una función de x', y, z y t. Para esto, debemos expresar en ecuaciones que τ es de hecho el agregado de lecturas de relojes en reposo en el sistema k, sincronizados de acuerdo con la regla dada en la sección 1.

Supongamos que en el instante τ_0 se envía un rayo luminoso a lo largo del eje X desde el origen del sistema k a x', y que este rayo es reflejado en el instante τ_1 desde allí hacia el origen, adonde llega en el instante τ_2: entonces debemos tener

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau$$

o, incluyendo los argumentos de la función τ y aplicando el principio de la constancia de la velocidad de la luz en el sistema de reposo,

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0,\left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right]$$
$$= \tau\left(x',0,0,t + \frac{x'}{V-v}\right).$$

De esto obtenemos, haciendo x infinitesimalmente pequeño,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v}+\frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t},$$

o

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{v}{V^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0.$$

Habría que señalar que, en lugar del origen de coordenadas, podríamos haber escogido cualquier otro punto como origen del rayo luminoso y, por consiguiente, la ecuación recién obtenida es válida para todos los valores de x', y, z.

Un razonamiento análogo —aplicado a los ejes Y y Z— da, recordando que la luz se propaga siempre a lo largo de estos ejes con la velocidad $\sqrt{V^2-v^2}$ cuando se observa desde el sistema de reposo,

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial z}=0.$$

Estas ecuaciones dan, puesto que τ es una función *lineal*,

$$\tau=a\left(t-\frac{v}{V^2-v^2}x'\right),$$

donde a es una función $\varphi(v)$ todavía desconocida, y donde suponemos por brevedad que en el origen de k tenemos $t=0$ cuando $\tau=0$.

Utilizando este resultado, podemos determinar fácilmente las cantidades ξ, η, ζ si expresamos en ecuaciones que (como exige el principio de la constancia de la velocidad de la luz en unión con el principio de relatividad) la luz se propaga también con velocidad V cuando se mide en el sistema en movimiento. Para un rayo luminoso emitido en el instante $\tau = 0$ en la dirección de las ξ crecientes, tenemos

$$\xi = V\tau,$$

o

$$\xi = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right).$$

Pero medido en el sistema de reposo, el rayo luminoso se propaga con velocidad $V - v$ relativa al origen de k, de modo que

$$\frac{x'}{V - v} = t.$$

Sustituyendo este valor de t en la ecuación para ξ, obtenemos

$$\xi = a\frac{V^2}{V^2 - v^2}x'.$$

Análogamente, considerando rayos luminosos que se mueven a lo largo de los otros dos ejes, obtenemos

$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right),$$

donde

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t, \qquad x' = 0,$$

por lo tanto

$$\eta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} y$$

y

$$\zeta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} z.$$

Si sustituimos el valor para *x*’, obtenemos

$$\tau = \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right).$$
$$\xi = \varphi(v)\beta(x - vt),$$
$$\eta = \varphi(v)y,$$
$$\zeta = \varphi(v)z,$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

y φ es una función de v desconocida por el momento. Si no se hace ninguna hipótesis con respecto a la posición inicial del sistema en movimiento y el punto cero de τ, entonces debe sumarse una constante a los segundos miembros de estas ecuaciones.

Ahora tenemos que demostrar que, medido en el sistema en movimiento, todo rayo luminoso se propaga con la velocidad V si así lo hace, como hemos supuesto, en el sistema de reposo; pues no hemos demostrado todavía que el principio de la constancia de la velocidad de la luz es compatible con el principio de relatividad.

Supongamos que en el tiempo $t = \tau = 0$ se quite una onda esférica desde el origen de coordenadas, que en dicho instante es común a ambos sistemas, y que esta onda se propaga en el sistema K con velocidad V. Por lo tanto, si (x, y, z) es un punto alcanzado por esta onda, tenemos

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2t^2$$

Transformamos esta ecuación utilizando nuestras ecuaciones de transformación y, tras un sencillo cálculo, obtenemos

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2\tau^2$$

Así pues, nuestra onda es también una onda esférica con velocidad de propagación V cuando se observa en el sistema en movimiento. Esto demuestra que nuestros dos principios fundamentales son compatibles.

Las ecuaciones de transformación que hemos obtenido contienen también una función desconocida φ de v, que queremos determinar ahora.

Para esto introducimos un tercer sistema de coordenadas K' que, con relación al sistema k, está en movimiento de traslación paralelo al eje χ, y tal que su origen se mueve a lo largo del eje χ con velocidad $-v$. Sean coincidentes los tres orígenes de coordenadas en el tiempo $t = 0$, y sea el tiempo t' del sistema K igual a cero en $t = x = y = z = 0$. Denotamos por x', y', z' las coordenadas medidas en el sistema K', y por una doble aplicación de nuestras ecuaciones de transformación, obtenemos

$$\begin{aligned} t' &= \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} &&= \varphi(v)\varphi(-v)t, \\ x' &= \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} &&= \varphi(v)\varphi(-v)x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= \varphi(-v)\eta &&= \varphi(v)\varphi(-v)y, \\ z' &= \varphi(-v)\zeta &&= \varphi(v)\varphi(-v)z. \end{aligned}$$

Puesto que las relaciones entre *x*', *y*', *z*' y *x, y, z* no contienen el tiempo *t*, los sistemas *K* y *K*' no están en reposo relativo mutuo, y es evidente que la transformación de *K* a *K*' debe ser la transformación identidad. Por lo tanto,

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1.$$

Exploremos ahora el significado de $\varphi(v)$. Nos centraremos en la porción del eje-*Y* del sistema *k* que se halla entre $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ y $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$. Esta porción del eje-*Y* es una vara que, con relación al sistema *K*, se mueve perpendicularmente a su eje con una velocidad *v* y cuyos extremos tienen coordenadas en *K*:

$$x_1 = vt, \qquad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \qquad z_1 = 0$$

y

$$x_2 = vt, \qquad y_2 = 0, \qquad z_2 = 0.$$

La longitud de la vara, medida en *K* es así $l/\varphi(v)$; esto nos da el significado de la función φ. Por razones de simetría, es ahora evidente que la longitud de una vara medida en el sistema de reposo y que se mueve perpendicularmente a su eje sólo puede depender de su velocidad y no de la dirección y sentido de su movimiento. Así pues, la longitud de la vara en movimiento medida en el sistema de reposo no cambia si se reemplaza v por $-v$. De esto concluimos

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)},$$

o

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

De esta relación y la encontrada antes se sigue que $\varphi(v) = 1$, de modo que las ecuaciones de transformación obtenidas se convierten en

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$
$$\xi = \beta(x - vt),$$
$$\eta = y,$$
$$\zeta = z,$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

4. EL SIGNIFICADO FÍSICO DE LAS ECUACIONES OBTENIDAS EN LO QUE CONCIERNE A CUERPOS RÍGIDOS Y RELOJES EN MOVIMIENTO

Consideremos una esfera rígida[3] de radio R que está en reposo relativo al sistema en movimiento k y cuyo centro yace en el origen de k. La ecuación de la superficie de esta esfera, que se mueve con velocidad v relativa a k, es

3. Por ejemplo, un cuerpo que tiene una forma esférica cuando se examina en reposo.

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$$

Expresada en términos de x, y, z la ecuación de esta superficie en el tiempo $t = 0$ es

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Un cuerpo rígido que tiene una forma esférica cuando se mide en reposo tiene, cuando se mide en movimiento —considerado desde el sistema de reposo—, la forma de un elipsoide de revolución con ejes

$$R\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}, R, R.$$

Así pues, mientras que las dimensiones Y y Z de la esfera (y, por lo tanto, también de todo cuerpo rígido, cualquiera que sea su forma) no parecen ser alteradas por el movimiento, la dimensión X parece estar contraída en la fracción 1: $\sqrt{1 - (v/V)^2}$, de modo que cuanto mayor es el valor de v, mayor es la contracción. Para $v = V$ todos los objetos en movimiento considerados desde el sistema de «reposo» se contraen en estructuras planas. Para velocidades superlumínicas nuestras consideraciones dejan de tener significado; como veremos a partir de consideraciones posteriores, en nuestra teoría la velocidad de la luz representa físicamente el papel de velocidades infinitamente grandes.

Es evidente que los mismos resultados se aplican a cuerpos en reposo en el sistema de «reposo» cuando se consideran desde un sistema en movimiento uniforme.

Imaginemos además que uno de los relojes que puede indicar el tiempo t cuando está en reposo relativo al sistema de reposo y el tiempo τ cuando está en reposo relativo al sistema en movimiento, se coloca en el origen de k y se pone en marcha de tal forma que indica el tiempo τ. ¿Cuál es el ritmo de este reloj cuando se considera desde el sistema de reposo?

Las cantidades x, t y τ que hacen referencia a la posición de dicho reloj satisfacen obviamente las ecuaciones:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$$

y

$$x = vt.$$

Así pues, tenemos

$$\tau = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)t$$

de lo que se sigue que la lectura del reloj considerado desde el sistema de reposo se retrasa cada segundo en $(\sqrt{1-(v/V)^2})$ segundos, o, salvo cantidades de cuarto orden y superiores, en ½ $(v/V)^2$ segundos.

Esto da lugar a la siguiente consecuencia peculiar: si en los puntos A y B de K hay relojes en reposo que, considerados desde el sistema de reposo, marchan de forma síncrona, y si el reloj de A es transportado a B a lo largo de la línea que los conecta con velocidad v, entonces a la llegada de dicho reloj a B los dos relojes ya no marcharán de forma síncrona; en su lugar, el reloj que ha sido transportado de A a B se habrá retrasado ½ tv^2/V^2 segundos (salvo cantidades de cuarto orden y superiores) respecto al reloj que ha estado en *B* desde el principio, donde *t* es el tiempo necesario para que el reloj viaje de *A* a *B*.

Vemos así que este resultado es válido incluso cuando el reloj se mueve de *A* a *B* a lo largo de cualquier línea poligonal arbitraria, e incluso cuando los puntos *A* y *B* coinciden.

Si suponemos que el resultado demostrado para una línea poligonal es también válido para una línea continuamente curvada, entonces llegamos al siguiente resultado: si existen en *A* dos relojes que marchan de forma síncrona, y uno de ellos se lleva a lo largo de una curva cerrada con velocidad constante hasta que haya vuelto a *A*, lo que necesita, digamos, *t* segundos, entonces, a su llegada a *A* se habrá retrasado $\frac{1}{2}\, t(v/V)^2$ respecto al reloj que no se ha movido. De esto concluimos que un reloj de volantes situado en el ecuador debe, en circunstancias por lo demás iguales, marchar ligeramente más lento que un reloj absolutamente idéntico situado en uno de los polos terrestres.

5. EL TEOREMA DE ADICIÓN DE VELOCIDADES

En el sistema *k* en movimiento con velocidad v a lo largo del eje *X* del sistema *K*, sea un punto que se mueve de acuerdo con las ecuaciones

$$\begin{aligned} \xi &= w_\xi \tau \\ \eta &= w_\eta \tau, \\ \zeta &= 0, \end{aligned}$$

donde w_ξ y w_η denotan constantes.

Buscamos el movimiento del punto relativo al sistema *K*. Introduciendo las cantidades x, y, z, t en las ecuaciones de movimiento del punto por medio de las ecuaciones de transformación deducidas en la sección 3, obtenemos

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} t,$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} w_\eta t,$$

$$z = 0.$$

Así pues, de acuerdo con nuestra teoría, la suma vectorial de velocidades sólo es válida en primera aproximación. Sea

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2$$

y

$$\alpha = \arctan \frac{w_y}{w_x};$$

α debe considerarse entonces como el ángulo entre las velocidades v y w. Después de un cálculo sencillo obtenemos

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha) - \left(\frac{vw\sin\alpha}{V^2}\right)^2}}{1 + \frac{vw\cos\alpha}{V^2}}.$$

Vale la pena señalar que v y w entran en la expresión para la velocidad resultante de una forma simétrica. Si w tiene también la dirección del eje X (eje χ), obtenemos

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

Se sigue de esta ecuación que la composición de dos velocidades que son menores que V da siempre como resultado una velocidad que es menor que ν. Pues si hacemos $v = V - \kappa$, y $w = V - \lambda$, donde κ y λ son positivas y menores que V, entonces

$$U = V \frac{2V - \kappa - \lambda}{2V - \kappa - \lambda + \frac{\kappa\lambda}{V}} < V.$$

Se sigue también que la velocidad de la luz V no puede alterarse al componerla con una «velocidad sublumínica». Pues en este caso obtenemos

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

En el caso en que v y w tienen la misma dirección, la fórmula para U podría haberse obtenido también componiendo dos transformaciones de acuerdo con la sección 3. Si además de los sistemas K y k, que aparecen en la sección 3, introducimos un tercer sistema de coordenadas K', que se mueve paralelo a k y cuyo origen se mueve con velocidad w a lo largo del eje χ, obtenemos ecuaciones entre las cantidades x, y, z, t y las correspondientes cantidades de k' que sólo difieren de las encontradas en la sección 3 en que «ν» es reemplazada por la cantidad

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}};$$

de esto vemos que tales transformaciones paralelas constituyen un grupo —como debe ser en realidad.

Hemos deducido ahora las leyes requeridas de la cinemática correspondiente a nuestros dos principios, y procedemos a su aplicación a la electrodinámica.

B. PARTE ELECTRODINÁMICA

6. TRANSFORMACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL-HERTZ PARA EL ESPACIO VACÍO. SOBRE LA NATURALEZA DE LAS FUERZAS ELECTROMOTRICES DEBIDAS AL MOVIMIENTO EN UN CAMPO MAGNÉTICO

Sean las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío válidas para el sistema de reposo *K*, de modo que tenemos

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

donde (*X, Y, Z*) denota el vector fuerza eléctrica y (*L, M, N*), el vector fuerza magnética.

Si aplicamos a estas ecuaciones las transformaciones deducidas en la sección 3, para relacionar los procesos electromagnéticos con el sistema de coordenadas en movimiento con velocidad *v* allí introducido, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \xi},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \xi},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \xi},$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

El principio de relatividad requiere que las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío sean válidas también en el sistema *k* si son válidas en el sistema *K*, i. e., que los vectores de las fuerzas eléctrica y magnética —(*X*', *Y*', *Z*') y (*L*', *M*', *N*')— del sistema en movimiento *k*, que están definidos en dicho sistema por sus efectos ponderomotrices sobre cargas eléctricas y magnéticas, respectivamente, satisfagan las ecuaciones

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial \tau} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}.$$

Obviamente, los dos sistemas de ecuaciones encontrados para el sistema k deben expresar exactamente lo mismo, puesto que ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el sistema K. Además, puesto que las ecuaciones para ambos sistemas están en acuerdo aparte de los símbolos que representan a los vectores, se sigue que las funciones que figuran en los sistemas de ecuaciones en lugares correspondientes deben coincidir salvo un factor $\psi(v)$, común a todas las funciones de uno de los sistemas de ecuaciones e independiente de ξ, η, ζ y τ, aunque posiblemente dependiente de v. Así pues, tenemos las relaciones:

$$X' = \psi(v)X, \qquad L' = \psi(v)L$$
$$Y' = \psi(v)\beta\left(Y - \tfrac{v}{V}N\right), \qquad M' = \psi(v)\beta\left(M + \tfrac{v}{V}Z\right),$$
$$Z' = \psi(v)\beta\left(Z + \tfrac{v}{V}M\right), \qquad N' = \psi(v)\beta\left(N - \tfrac{v}{V}Y\right).$$

Si ahora invertimos este sistema de ecuaciones, resolviendo primero las ecuaciones recién obtenidas, y aplicando en segundo lugar a las ecuaciones la transformación inversa (desde k a K), que está caracterizada por la velocidad $-v$, obtenemos, teniendo en cuenta que ambos sistemas de ecuaciones así obtenidos deben ser idénticos,

$$\psi(v) \cdot \psi(-v) = 1.$$