NÚMEROS INCREÍBLES

«Ian Stewart explica las ideas más complicadas de forma amena y brillante.»
New Scientist

Ian Stewart

CRÍTICA

NÚMEROS INCREÍBLES

Ian Stewart

Traducción castellana de
Laura Sánchez

CRÍTICA
BARCELONA

Primera edición: abril de 2016

Números increíbles
Ian Stewart

Título original: *Incredible numbers*

Av. Diagonal, 662-664, 08034 Barcelona (España)
Crítica es un sello editorial de Editorial Planeta, S. A.

editorial@ed-critica.es
www.ed-critica.es

ISBN: 978-84-9892-948-5
Depósito legal: B. 5785 - 2016
2016. Impreso y encuadernado en España por Talleres Gráficos Soler S. A.

Índice

Números

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... ¿Hay algo más sencillo? Y no obstante son los números, quizá más que ninguna otra cosa, los que han permitido a la humanidad enfangarse y tocar las estrellas.

Cada número particular tiene sus propias características y nos lleva a una variedad de áreas de matemáticas. Sin embargo, antes de examinarlos uno por uno, merece la pena echar un vistazo a tres grandes cuestiones: ¿cómo se originaron los números?, ¿cómo se desarrolló el concepto de número? y ¿qué *son* los números?

El origen de los números

Hace alrededor de 35.000 años, en el Paleolítico Superior, un humano desconocido talló 29 marcas en el peroné de un babuino. Se encontró en una cueva en la cordillera Lebombo, en Suazilandia, y se conoce como el «hueso de Lebombo». Se cree que es un palo de conteo, algo que registra números como una serie de muescas: |, ||, |||, etcétera. Hay 29,5 días en el mes lunar, de modo que podría ser un primitivo calendario lunar, o el registro del ciclo de menstruación de una mujer. O, es más, una colección aleatoria de cortes. Un hueso garabateado.

El hueso de lobo, otro palo de conteo con 55 muescas, lo encontró en Checoslovaquia, en 1937, Karl Absolon. Tiene alrededor de 30.000 años.

En 1960, el geólogo belga Jean de Heinzelin de Braucourt descubrió un peroné de babuino con muescas entre los restos de una pequeña comunidad de pescadores que había sido sepultada por un volcán en erupción. La ubicación es lo que ahora se conoce como Ishango, en la frontera entre Uganda y el Congo. Se atribuye al hueso una antigüedad de 20.000 años.

La interpretación más sencilla del hueso de Ishango es la de que se trata de un palo de conteo. Algunos antropólogos van más allá y detectan elementos de estructura aritmética, como multiplicación, división y números primos; otros creen que es un calendario lunar de seis meses; y hay quienes están convencidos de que las marcas se hicieron para proporcionar un buen agarre a una herramienta hecha de hueso y que no tienen significado matemático.

Es muy enigmático. Hay tres series de muescas. La serie central usa los números 3, 6, 4, 8, 10, 5, 7. Dos veces 3 es 6, dos veces 4 es 8 y dos veces 5 es 10; sin embargo, el orden para el par final es el inverso y 7 no encaja en el patrón en absoluto. La serie de la izquierda es 11, 13, 17, 19: los números primos del 10 al 20. La serie de la derecha proporciona los números impares 11, 21, 19, 9. Las series de derecha e izquierda suman cada una 60.

Un problema con la interpretación de patrones como este es que es difícil no encontrar un patrón en cualquier serie de números más bien pequeños. Por ejemplo, en la Tabla 1 se muestra una lista de áreas de diez islas en las Bahamas, en concreto los números 11-20 en términos

Figura 1. Parte frontal y trasera del hueso de Ishango. Museo de Ciencias Naturales de Bruselas.

de área total. Para mezclar los números en la lista he puesto las islas en orden alfabético. Te aseguro que esto es lo primero que intenté. Cierto es que la habría cambiado por otra cosa si no me hubiese valido para explicar mi propósito, pero funcionó, así que no la cambié.

¿Qué notamos en este «patrón» de números? Hay muchas secuencias cortas con características comunes:

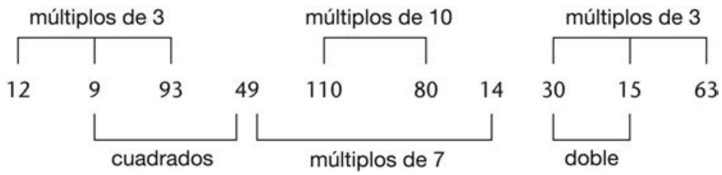

Figura 2. Algunos patrones aparentes en el área de las islas Bahamas.

Para empezar, hay una hermosa simetría en la lista. En cada extremo hay una terna de múltiplos de 3. En el medio, hay un par de múltiplos de 10, separando a dos múltiplos de 7. Además, dos cuadrados: $9 = 3^2$ y $49 = 7^2$, ambos cuadrados de números primos. Otro par adyacente está formado por 15 y 30, uno el doble del otro. En la secuencia 9-93-49, todos los dígitos tienen un 9. Los números crecen y decrecen de modo alterno, excepto por 110-80-14. ¡Oh! ¿Y te has dado cuenta de que *ninguno* de estos diez números es primo?

Nombre	*Área en millas cuadradas*
Berry	12
Bimini	9
Isla de Crooked	93
Pequeña Inagua	49
Mayaguana	110
Nueva Providencia	80
Isla Ragged	14
Cayo Rum	30
Cayo Sámana	15
Isla de San Salvador	63

Tabla 1

No hay más que decir. Otro problema con el hueso de Ishango es la imposibilidad virtual de encontrar evidencias extras que apoyen alguna interpretación concreta. Pero las marcas en él son realmente enigmáticas. Los rompecabezas de números siempre lo son. Así que vamos con algo menos polémico.

Hace diez mil años, en Oriente Medio la gente usaba piezas de barro para llevar un registro numérico. Quizá tenía que ver con los impuestos o como prueba de una propiedad. Los ejemplos más antiguos son Tepe Asiab y Ganj-iDareh Tepe, dos yacimientos en la cadena montañosa de Zagros, en Irán. Las piezas eran pequeños trozos de barro de varias formas, algunas con marcas simbólicas. Una bola marcada con + representaba una oveja, siete de esas bolas indicaban siete ovejas. Para evitar estar marcando un gran número de piezas, había una de un tipo diferente para diez ovejas. Y otra que representaba diez cabras, y así sucesivamente. La arqueóloga Denise Schmandt-Besserat dedujo que las piezas representaban elementos básicos de la época, como cereales, animales y jarras de aceite.

Alrededor de 4000 a. C., las piezas se unían con una cuerda a modo de collar. Como era fácil cambiar los números añadiendo o eliminando piezas, se introdujo una medida de seguridad: se envolvían las piezas con barro, que luego se cocía. Una discusión sobre los números podía resolverse rompiendo el sobre de barro para abrirlo. A partir de 3500 a. C., para evitar roturas innecesarias, los burócratas de la antigua Mesopotamia inscribían símbolos en el sobre, listando las piezas que había en él.

Fue entonces cuando una mente brillante se dio cuenta de que los símbolos convertían las piezas en redundantes. El resultado fue un sistema de símbolos numéricos escritos, lo cual estableció las bases de todos los sistemas subsiguientes de notación numérica y, posiblemente, de la propia escritura.

Como este libro no es de historia, daré la visión de sistemas notacionales posteriores como si surgiesen en conexión con números específicos. Por ejemplo, la notación decimal moderna y antigua se aborda en el capítulo [10]. Sin embargo, como el gran matemático Carl Friedrich Gauss señaló una vez, lo importante no son las notaciones, sino las nociones. Los temas que siguen tendrán más sentido si se

Figura 3. Sobre de arcilla y piezas para la contabilidad, período de Uruk, de Susa.

ven en un contexto de concepción de los números cambiante por parte de la humanidad. De modo que empezaremos repasando los sistemas numéricos principales y alguna terminología importante.

El sistema numérico creciente

Tendemos a pensar en los números como algo fijo e inmutable: una característica del mundo natural. En realidad son una invención humana, pero una muy útil, porque representa aspectos importantes de la naturaleza, como cuántas ovejas posees o la edad del universo. La naturaleza nos sorprende reiteradamente destapando nuevas preguntas, cuyas respuestas a veces requieren nuevos conceptos matemáticos. Otras veces, la exigencia interna de indicios matemáticos en estructuras nuevas y potencialmente útiles. De vez en cuando estos indicios y problemas han llevado a los matemáticos a extender el sistema numérico inventando nuevos tipos de números.

Hemos visto cómo los números surgen primero como un método para contar cosas. En la temprana Grecia clásica, la lista de números empezaba 2, 3, 4, etcétera. El 1 era especial, no era «realmente» un número. Más tarde, cuando esta convención comenzó a parecer absurda, el 1 pasó a considerarse también un número.

El siguiente gran avance en la ampliación del sistema numérico fue la introducción de las fracciones. Estas son útiles para dividir algún producto entre varios. Si tres personas obtienen partes iguales de dos bushels* de cereales, cada una recibe $\frac{2}{3}$ de un bushel.

Los antiguos egipcios representaban las fracciones de tres modos diferentes. Tenían jeroglíficos especiales para $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$. Usaban varias porciones del ojo de Horus para representar 1 dividido por las primeras seis potencias de 2. Finalmente, ideaban símbolos para fracciones unitarias, las que son de la forma «uno sobre algo»: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etcétera. Expresaban todas las otras fracciones como sumas de distintas fracciones unitarias. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

No está claro por qué no escribían $\frac{2}{3}$ como $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, pero no lo hacían.

El número cero llegó mucho después, probablemente porque no se necesitaba demasiado. Si no tienes ovejas, no hay necesidad de contarlas o listarlas. Cero se introdujo primero como un símbolo y no se pensó en él como un número. Pero cuando los matemáticos chinos e

Figura 4. A la izquierda, jeroglíficos egipcios para $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$. En el centro, ojo de Horus. A la derecha, jeroglífico de la fracción derivado de ellos.

* Unidad de medida de capacidad anglosajona. (*N. de la t.*)

hindúes introdujeron los números negativos [véase –1], el 0 tuvo que ser considerado un número también. Por ejemplo, 1 + (–1) = 0, la suma de dos números debe sin duda contar como un número.

Los matemáticos llaman al sistema de los números:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

números naturales, y cuando se incluyen los números negativos, son los *enteros*.

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Las fracciones, el cero y las fracciones negativas forman los *números racionales*.

Un número es *positivo* si es mayor que cero, y *negativo* si es más pequeño que cero. De modo que cada número (ya sea un entero o un racional) está exactamente en una de las tres categorías: positivo, negativo o cero. Los números que usamos para contar:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

son enteros positivos. Esta convención nos lleva a una terminología un poco burda: a menudo nos referimos a los números naturales:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

como los enteros *no negativos*. Siento esto.

Durante mucho tiempo, las fracciones fueron lo máximo que alcanzó el concepto de número. Pero en la antigua Grecia probaron que el cuadrado de una fracción nunca puede ser exactamente igual a 2. Más tarde esto se expresó como «el número $\sqrt{2}$ es irracional», esto es, no racional. Los griegos tenían un modo más engorroso de decir esto mismo, pero sabían que $\sqrt{2}$ debía existir: por el teorema de Pitágoras, es la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1. Así que se necesitaban más números, los racionales solos no pueden hacerlo todo. Los griegos encontraron un complicado método geométrico para lidiar con los números irracionales, pero no era completamente satisfactorio.

El siguiente paso hacia el concepto moderno de número fue hacer posible la invención de la coma decimal (,) y la notación decimal. Esto hizo posible representar los números irracionales con un grado alto de precisión. Por ejemplo:

$$\sqrt{2} \sim 1{,}4142135623$$

aproximado a 10 cifras decimales (el símbolo ~ significa «es aproximadamente igual a»). Esta expresión no es exacta: su cuadrado es realmente

$$1{,}99999999979325598129$$

Una aproximación mejor, que sería con 20 cifras decimales, es esta:

$$\sqrt{2} \sim 1{,}41421356237309504880$$

pero de nuevo no es exacta. Sin embargo, hay un sentido lógico riguroso en el cual una expansión decimal infinita es exacta. Por supuesto, esa expresión no puede escribirse completa, pero es posible establecer las ideas para que tenga sentido.

Los decimales con parte decimal infinita (incluyendo aquellos que la tienen finita, pues pueden pensarse como decimales que terminan en una cantidad infinita de ceros) se llaman *números reales*, en parte porque corresponden directamente a medidas del mundo natural como longitudes o pesos. Cuanto más precisa sea la medición, más cifras decimales necesitas; para obtener un valor exacto, necesitas infinitas. Tal vez resulte irónico que «real» esté definido por un símbolo infinito que no puede escribirse completamente. Los números reales negativos también están permitidos.

Hasta el siglo XVIII ningún otro concepto matemático se consideró como números genuinos. Pero ya en el siglo XV, unos cuantos matemáticos se preguntaron si habría un tipo de número nuevo: la raíz cuadrada de menos uno. Esto es, un número que da –1 cuando lo multiplicas por sí mismo. A primera vista se trata de una idea disparatada, porque el cuadrado de cualquier número real es positivo o cero. Sin embargo, resultó ser una buena idea seguir adelante y equipar a –1 con una raíz cuadrada, para lo cual Leonhard Euler introdujo el símbolo i. Esta es la letra inicial de «imaginario» (en inglés, latín, francés, alemán y español) y se llamaron así para distinguirlos de los viejos números reales. Por desgracia, esto llevó a mucho misticismo innecesario —Gottfried Leibniz una vez se refirió a i como «un anfibio entre ser y no ser»—, lo cual complicó una verdad clave. En concreto, tanto números reales como imaginarios tiene exactamente la misma condición lógica. Son conceptos humanos que modelan la realidad, pero no son reales por sí mismos.

La existencia de i hace necesario introducir muchos otros números nuevos para poder hacer cálculos aritméticos, números como 2 + 3i. Estos se llaman *números complejos*, y han sido indispensables en matemáticas y ciencias durante los últimos siglos. Es curioso, porque lo cierto es que son nuevos para la mayoría de la raza humana, pues no sueles encontrarte con números complejos en las matemáticas del colegio; no porque carezcan de importancia, sino porque las ideas son demasiado sofisticadas y las aplicaciones demasiado avanzadas.

Los matemáticos utilizan símbolos con florituras para los principales sistemas numéricos. No los usaré de nuevo, pero deberías verlos al menos una vez:

$\mathbb{N}$ = el conjunto de todos los números naturales 0, 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Z}$ = el conjunto de todos los números enteros –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Q}$ = el conjunto de todos los números racionales
$\mathbb{R}$ = el conjunto de todos los números reales
$\mathbb{C}$ = el conjunto de todos los números complejos

Estos sistemas encajan unos dentro de otros como unas matrioskas:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

El símbolo de la teoría de conjuntos $\subset$ significa «está contenido en». Observa que, por ejemplo, todo entero es racional; un ejemplo sería el entero 3, que es también la fracción $\frac{3}{1}$. Normalmente no lo escribimos de este modo, pero ambas notaciones representan el mismo número. De manera similar, todo número racional es también real, y todo real es también complejo. Los sistemas más antiguos se incorporan a los nuevos, no se reemplazan.

Incluso los números complejos no son el final de las extensiones del sistema numérico que los matemáticos han hecho a lo largo de los siglos. Están los cuaterniones $\mathbb{H}$ y los octoniones $\mathbb{O}$ [véase 4], por ejemplo. Sin embargo, estos son más provechosos desde un punto de vista algebraico que aritmético. Y acabaré mencionando un número más paradójico: infinito. Desde un punto de vista filosófico, infinito difiere de los números convencionales y no pertenece a ninguno de los sistemas numéricos estándar, desde los números naturales a los números complejos. Sin embargo, merodea por los márgenes, con un aspecto numérico pero sin ser un número como tal. Hasta que Georg Cantor revisó nuestro punto de partida, contar, y mostró que no solo infinito es un número en el sentido de contar, sino también que hay *diferentes tamaños* de infinito. Entre ellos están $\aleph_0$, el número de números naturales, y $\mathfrak{c}$, el número de números reales, el cual es mayor. *Cuánto* mayor es discutible: depende del sistema de axiomas que uses para formalizar las matemáticas.

Pero dejemos estos números hasta que hayamos desarrollado la suficiente intuición sobre números más ordinarios. Lo que me lleva a la tercera cuestión.

¿Qué es un número?

Parece una pregunta sencilla, y lo es. Pero no así la respuesta.

Todos sabemos cómo usar los números. Todos sabemos qué aspecto tienen siete vacas, siete ovejas o siete sillas. Todos podemos contar hasta siete. Pero ¿qué *es* siete?

No es el símbolo 7. Esa es una elección arbitraria y es diferente en muchas culturas. En árabe es ٧, en chino es 七 o más formalmente 柒.

No es la palabra «siete». En francés es *sept*, en alemán es *sieben.*

Hacia mediados del siglo XIX, algunos matemáticos con mentalidad lógica se dieron cuenta de que, aunque todo el mundo había estado usando los números durante miles de años, nadie sabía realmente qué eran. Así que hicieron la pregunta que nunca debería haberse formulado: ¿qué *es* un número?

Es una pregunta más complicada de lo que parece. Un número no es algo que puedas mostrar a alguien en el mundo físico. Es una abstracción, un concepto mental humano, uno derivado de la realidad, pero no exactamente *real*.

Puede sonar preocupante, pero los números no son solo eso. Un ejemplo común es el «dinero». Todos sabemos cómo pagar algo y cuál es su cambio, y lo hacemos —ingenuamente imaginamos— intercambiando dinero. Tendemos a pensar en dinero como las monedas y billetes en nuestros bolsillos o carteras. Sin embargo, no es tan simple. Si usamos la tarjeta de crédito, no hay intercambio de monedas o billetes. En su lugar, hay señales que pasan a través de un sistema telefónico a la compañía de la tarjeta y finalmente a nuestro banco, y las cifras en las cuentas bancarias —la nuestra, la de la tienda, la de la compañía de la tarjeta— cambian. Un billete británico de 5 libras usado para llevar el mensaje «Prometo pagar bajo demanda al portador la suma de cinco libras», no es dinero en absoluto, sino la promesa de pagar dinero. Hubo un tiempo en el que podías llevarlo al banco y cambiarlo por oro, lo que era considerado como el dinero *real*. Ahora, todo lo que el banco haría sería cambiártelo por otro billete de 5 libras. Pero el oro tampoco era realmente dinero, era solo una manifestación física de este. Como prueba, el valor del oro no es fijo.

¿Es entonces el dinero un número? Sí, pero solo con un contexto legal específico. Escribir 1.000.000 de dólares en un trozo de papel no te convierte en millonario. Lo que hace que el dinero sea *dinero* es un cuerpo de convenciones humanas sobre cómo representamos los números del dinero y cómo lo cambiamos por bienes u otros números. Lo que importa es lo que haces con él, no lo que es. El *dinero* es una abstracción.

Lo mismo pasa con los números. Aunque esta respuesta no resuelve mucho, porque *todo* en matemáticas es una abstracción. De modo que unos cuantos matemáticos siguieron preguntándose qué *tipo* de abstracción podía definir «número». En 1884, un matemático alemán llamado Gottlob Frege escribió *Los fundamentos de la aritmética*, estableciendo los principios fundamentales sobre los que se basan los números. Una década después, fue más allá, e intentó derivar esos principios de las leyes más básicas de la lógica. Su *Leyes básicas de la aritmética* se publicó en dos volúmenes, el primero en 1893 y el segundo en 1903.

Frege empezó a partir del proceso de contar y no se centró en los números que usamos, sino en las cosas que contamos. Si pones siete tazas en una mesa y las cuentas: «1, 2, 3, 4, 5, 6, 7», los objetos importantes parecen ser los números, pero para Frege lo importante eran las tazas. Contar tiene sentido porque tenemos una colección de tazas que queremos contar. Con una colección diferente, tendríamos un número diferente. Frege llamó a estas colecciones *clases* (en alemán). Cuando contamos cuántas tazas contiene esta clase en particular, establecemos una *correspondencia* entre la clase de las tazas y los símbolos numéricos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

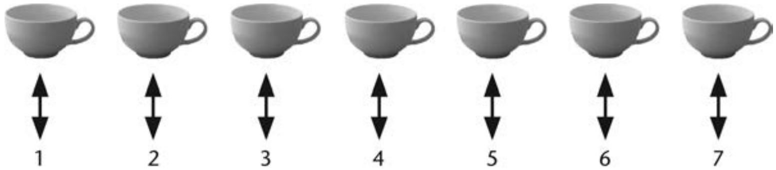

Figura 5. Correspondencia entre tazas y números.

De modo similar, dada una clase de platos, quizá seamos capaces de establecer también esta correspondencia:

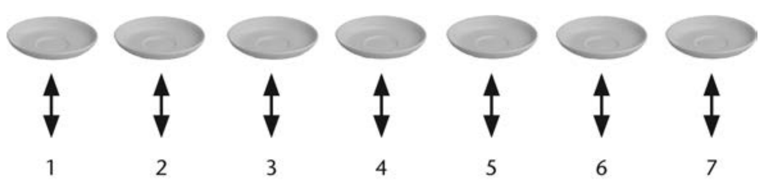

Figura 6. Correspondencia entre platos y números.

En tal caso, podemos concluir que la clase de platos contiene el mismo número de platos que la clase de tazas contiene de tazas. Incluso sabemos cuántos: siete.

Esto podría parecer obvio hasta el punto de la banalidad, pero Frege se dio cuenta de que nos estaba diciendo algo bastante profundo. En concreto, que podemos probar que la clase de platos contiene el mismo número de platos que la clase de tazas contiene de tazas, *sin* usar los símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y sin saber cuántas tazas o platos hay. Es suficiente con establecer una correspondencia entre la clase de tazas y la clase de platos:

Figura 7. Correspondencia entre tazas y platos sin necesidad de números.

Técnicamente, este tipo de correspondencia es conocido como una correspondencia *uno a uno*: cada taza se empareja exactamente con un plato, y cada plato se empareja exactamente con una taza. El contar no funciona si te olvidas de alguna taza o cuentas la misma taza varias veces. Lo llamaremos correspondencia, mientras recordemos esta condición técnica.

Por cierto, si alguna vez te has preguntado por qué los niños en la escuela pasan cierto tiempo «emparejando» conjuntos de vacas con conjuntos de pollos, o cualquier otra cosa, dibujando líneas entre las imágenes, es culpa de Frege. Algunos educadores esperaban (y puede que todavía esperen) que su planteamiento podría mejorar la intuición para los números. Yo me inclino a verlo como promover la lógica e ignorar la psicología y acabar confundido en lo que se refiere al significado de «fundamental», pero no reiniciemos una guerra matemática aquí.

Frege concluyó que emparejar clases usando una correspondencia se encuentra en el fondo de lo que entendemos por «número». Contar cuántas cosas contiene una clase tan solo empareja esa clase con una clase estándar, cuyos miembros se denotan con los símbolos convencionales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etcétera, dependiendo de la cultura de uno. Pero Frege no creía que el concepto de número debiese depender de la cultura, de modo que encontró un modo de evitar de una vez símbolos arbitrarios. Más exactamente, inventó un supersímbolo universal, el mismo para cualquier cultura. Pero no puedes escribirlo, pues era algo puramente conceptual.

Empezó señalando que los miembros de una clase pueden ser clases ellos mismos. No tienen que serlo, pero no hay nada que lo impida. Una caja de latas de alubias es un ejemplo del día a día: los miembros de la caja son latas y los miembros de las latas son alubias. De modo que es correcto usar clases como miembros de otras clases.

El número «siete» está asociado, por correspondencia, a cualquier clase que se pueda emparejar con nuestra clase de tazas o la correspondiente clase de platos o la clase que consiste en los símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Escoger una clase en concreto de estas y llamar *a eso* un número es una decisión arbitraria que carece de elegancia y resulta insatisfactoria. Así que ¿por qué no jugarse el todo por el todo y usar todas estas clases? Entonces «siete» puede definirse como la *clase de todas las clases* que están en correspondencia con cualquiera (por tanto todas) de las clases que acabamos de mencionar. Haciendo esto, podemos decir si cualquier clase dada tiene siete miembros comprobando si es miembro de esta clase de clases. Por comodidad etiquetamos esta clase de clases como «siete», pero la propia clase tiene sentido incluso si no lo hacemos. De modo que Frege distinguió un número de un nombre arbitrario (o símbolo) para ese número.

Podría entonces definir qué es un número: es la clase de las clases que está en correspondencia con una clase dada (por tanto, también con las otras). Este tipo de clase es a lo que me refería como «supersímbolo». Si estás en esta línea de pensamiento, esta es una idea brillante. De hecho, en lugar de escoger un nombre para el número, conceptualmente agrupamos *todos los posibles nombres* juntos en un único objeto y usamos ese objeto en su lugar.

¿Funcionó? Lo podrás ver más adelante, en el capítulo [$\aleph_0$].