El sorprendente libro de las rarezas matemáticas

David Darling
Agnijo Banerjee

En el límite del infinito y más allá

Paidós

DAVID DARLING Y AGNIJO BANERJEE

EL SORPRENDENTE LIBRO DE LAS RAREZAS MATEMÁTICAS

En el límite del infinito y más allá

Traducción de Pablo Hermida Lazcano

PAIDÓS Contextos

Título original: *Weird Maths. At the Edge of Infinity and Beyond*, de David Darling y Agnijo Banerjee
Esta edición ha sido publicada por acuerdo con Oneworld Publications

1.ª edición, octubre de 2019

Paidós es un sello editorial de Editorial Planeta, S. A.
Avda. Diagonal, 662-664
08034 Barcelona, España
www.paidos.com
www.planetadelibros.com

Ilustraciones: Pastern bones © Sarah Joy; Pi artwork © Jeff Darling; Hurricane Felix © NASA; Mandelbrot set © Wolfgang Beyer; strange attractor © Anders Sandberg; Turing machine © Rocky Acosta; quantum computer prototype © Ion Quantum Technology Group, University of Sussex; Voyager Golden Record © NASA/JPL; Humpback whale © NOAA; galaxy cluster Abell S1077 © ESA/Hubble, NASA, and N. Rose; infinity mirror © Josh Staiger; Möbius band © David Benbennick

ISBN 978-84-493-3626-3
Fotocomposición: Realización Planeta
Depósito legal: B. 16.298-2019
Impresión y encuadernación en Huertas Industrias Gráficas, S. A.

El papel utilizado para la impresión de este libro es cien por cien libre de cloro y está calificado como papel ecológico.

Impreso en España – *Printed in Spain*

SUMARIO

CAPÍTULO 1

Las matemáticas detrás del mundo

> Han ocurrido cosas más extrañas todavía; y quizá la más extraña de todas sea la maravilla de que las matemáticas sean posibles para una raza parecida a los simios.
>
> ERIC T. BELL, *Historia de las matemáticas*

> La física es matemática no por lo mucho que sabemos sobre el mundo físico, sino por lo poco que sabemos; sus propiedades matemáticas son las únicas que somos capaces de descubrir.
>
> BERTRAND RUSSELL

En cuanto a su capacidad intelectual, el *Homo sapiens* apenas ha cambiado a lo largo de los últimos cien mil años. Si metiéramos en una escuela actual a los niños de la época en la que los rinocerontes y los mastodontes lanudos todavía vagaban por la tierra, se desarrollarían igual de bien que los típicos jóvenes del siglo XXI. Su cerebro asimilaría la aritmética, la geometría y el álgebra. Y, si sintieran esa inclinación, nada les impediría profundizar en el tema y tal vez llegarían a ser algún día profesores de matemáticas en Cambridge o en Harvard.

Nuestro aparato neuronal desarrolló el potencial para hacer cálculos avanzados y para comprender cosas tales como la teoría de conjuntos y la geometría diferencial, mucho antes de aplicarse en este sentido. De hecho, resulta un tanto misterioso *por qué* tenemos este talento innato para las matemáticas superiores, cuando estas carecen de un valor evidente para la supervivencia. Al mismo tiempo, la razón por la cual surgió y sobrevivió nuestra especie es que tenía una ventaja sobre sus rivales en lo que atañe a la inteligencia y a la capacidad de pensar lógicamente, planear con antelación y preguntar «¿Y si...?». A falta de otras destrezas para la supervivencia, tales como la velocidad y la fuerza, nuestros antepasados se vieron obligados a depender de su astucia y de su previsión. La capacidad de pensamiento lógico se convirtió en nuestro gran superpoder, y, con el tiempo, dimanaría de ella nuestra facultad de comunicarnos de una manera compleja, de simbolizar y de comprender en términos racionales el mundo que nos rodea.

Como todos los animales, hacemos, en efecto, muchas matemáticas difíciles sobre la marcha. El simple acto de coger una pelota (o de evitar a los depredadores o de cazar una presa) implica resolver simultáneamente múltiples ecuaciones a alta velocidad. Si intentamos programar un robot para que haga lo mismo, la complejidad de los cálculos implicados es evidente. Pero la gran fortaleza de los humanos era su capacidad para pasar de lo concreto a lo abstracto, analizar las situaciones, hacer preguntas del tipo «Si..., entonces...» y planear con antelación.

El nacimiento de la agricultura conllevó la necesidad de seguir con precisión el ritmo de las estaciones, y la aparición del comercio y las comunidades asentadas significó la necesidad de llevar a cabo transacciones y llevar las cuentas. Estos dos propósitos prácticos, los calendarios y las transacciones comerciales, requerían el desarrollo de alguna clase de cálculo, y de este modo hicieron su aparición las matemáticas elementales. Una de las regiones en las que surgió fue Oriente Medio. Los arqueólogos han desenterrado fichas comerciales de arcilla sumerias que se remontan a alrededor del año 8000 a. C. que demuestran que aquellas personas manejaban representaciones del número. Pero, al parecer, en ese periodo temprano, no trataban el concepto como separado de la cosa contada. Por ejemplo, disponían de fichas de diferentes formas para cosas diferentes, como las ovejas o las tinajas de aceite. Cuando las partes tenían que intercambiarse muchas fichas, estas se sellaban en el interior de recipientes llamados *bullae*, que tenían que romperse para abrirlas, a fin de comprobar su contenido. Con el tiempo, comenzaron a aparecer marcas en las *bullae* para indicar cuántas fichas había en su interior. Las representaciones simbólicas evolucionaron entonces hacia un sistema numérico escrito, en tanto que las fichas llegaron a generalizarse para contar cualquier clase de objetos y, finalmente, se transformaron en una forma temprana de sistema monetario. A lo largo del camino, el concepto de número se abstrajo del tipo de objeto contado,

Los egipcios tenían un buen conocimiento de las matemáticas prácticas y lo aplicaron a la construcción de la pirámide de Kefrén, en Guiza, mostrada aquí junto a la *Gran Esfinge*.

de suerte que, por ejemplo, cinco, era cinco, tanto si se refería a cinco cabras como a cinco hogazas de pan.

La conexión entre las matemáticas y la realidad cotidiana parece fuerte en aquella etapa. El cálculo y el mantenimiento de registros son herramientas prácticas del agricultor y del comerciante, y si esos métodos cumplen su misión, ¿a quién le importa la filosofía que hay detrás? La aritmética simple parece bien arraigada en el mundo «de ahí fuera»: una oveja más una oveja son dos ovejas, dos ovejas más dos ovejas son cuatro ovejas. Nada podría ser más sencillo. Ahora bien, si observamos con más atención, vemos que ha sucedido ya algo un tanto extraño. Al decir «una oveja y una oveja», se está asumiendo que las ovejas son idénticas o, al menos, a efectos del cálculo, que las diferencias no importan. Pero no hay dos ovejas iguales. Lo que hemos hecho es abstraer una cualidad percibida que tiene que ver con la oveja (su identidad o singularidad) y operar sobre esta cualidad con otra abstracción, que denominamos *adición*. Se trata de un gran paso. En la práctica, sumar una oveja y una oveja puede significar ponerlas juntas en el mismo campo. Pero, también en la práctica, las ovejas son diferentes, y, ahondando un poco más, lo que llamamos *oveja* —como cualquier otro elemento del mundo— no está separado en realidad del resto del universo. Además, tenemos el hecho ligeramente inquietante de que lo que consideramos objetos (como las ovejas) que están «ahí fuera» son construcciones de nuestro cerebro, creadas por señales que penetran en nuestros sentidos. Incluso si aceptamos que una oveja posee alguna realidad externa, la física nos dice que se trata de un ensamblaje temporal enormemente complejo de partículas subatómicas en flujo constante. Sin embargo, de algún modo, al contar ovejas somos capaces de ignorar esta monumental complejidad, o, más bien, en la vida cotidiana, ni siquiera somos conscientes de ella.

De todas las disciplinas, la matemática es la más precisa e inmutable. La ciencia y otros ámbitos de la actividad humana son, a lo sumo, aproximaciones a algún ideal, y no cesan de cambiar y evolucionar a lo largo del tiempo. Como señalara el matemático alemán Hermann Hankel: «En la mayoría de las ciencias, una generación derriba lo que otra ha construido, y lo que una ha establecido otra lo deshace. Solo en las matemáticas cada generación añade un nuevo piso a la vieja estructura». Desde el principio, esta diferencia entre las matemáticas y cualquier otra disciplina resulta inevitable, pues en las matemáticas la mente empieza por extraer aquello que reconoce como más fundamental y constante entre los mensajes que recibe a través de los sentidos. Esto conduce al concepto de *número natural*, como una forma de medir la cantidad, y de *adición* y *sustracción*, como formas básicas de combinar cantidades. Unidad, dualidad, trinidad, y así sucesivamente, se consideran rasgos comunes de conjuntos de cosas, cualesquiera que esas cosas resulten ser y por muy diferentes que sean los individuos del mismo tipo de cosa. Así pues, el hecho de que las matemáticas posean esta cualidad adamantina y eterna está garantizado desde el comienzo y supone su mayor fortaleza.

Las matemáticas existen. De eso no cabe la menor duda. El teorema de Pitágoras, por ejemplo, forma parte de nuestra realidad de algún modo. Ahora bien, ¿*dónde* existen cuando no están siendo usadas ni ejemplificadas en alguna forma material, y dónde *existían* hace muchos miles de años, antes de que alguien hubiera pensado en ellas? Los platónicos creen que los objetos matemáticos, tales como los números, las formas geométricas y las relaciones entre ellos, existen independientemente de nosotros, de nuestros pensamientos, de nuestro lenguaje y del universo físico. No especifican qué clase de reino etéreo habitan, pero suponen habitualmente que están «ahí fuera». Probablemente sea justo decir que la mayoría de los matemáticos participan de esta escuela de pensamiento y, por consiguiente, también de la creencia de que las matemáticas se descubren, no se inventan. Además, probablemente la mayoría de ellos no propenden a filosofar y se contentan con continuar haciendo matemáticas, del mismo modo que a la mayoría de los físicos, al trabajar en el laboratorio o al resolver problemas teóricos, no les preocupa mucho la metafísica. Con todo, la naturaleza última de las cosas —en este caso, de las cosas matemáticas— es interesante, incluso si nunca llegamos a una respuesta definitiva. El matemático y lógico prusiano Leopold Kronecker pensaba que solo los números enteros eran dados, o en sus palabras: «Dios hizo los números enteros; todo el resto es obra del hombre». El astrofísico inglés Arthur Eddington fue más allá al afirmar: «Las matemáticas no están ahí hasta que nosotros las ponemos ahí». El debate sobre si las matemáticas son inventadas o descubiertas, o acaso una combinación de ambas cosas surgida de una sinergia de la mente y la materia, seguirá coleando, sin duda, y, en última instancia, puede que no admita una respuesta simple.

Un hecho está claro: si se ha demostrado la verdad de un elemento matemático, este seguirá siendo verdadero para siempre. No es una cuestión de opiniones ni depende de influencias subjetivas. «Me gustan las matemáticas —observaba Bertrand Russell— porque no son humanas y no tienen nada que ver en particular con este planeta ni con la totalidad del universo accidental». David Hilbert expresó algo similar: «Las matemáticas no entienden de razas ni de fronteras geográficas; para las matemáticas, el mundo cultural es un solo país». Esta cualidad universal e impersonal de las matemáticas es su mayor fortaleza, si bien, para el ojo entrenado, no desmerece su atractivo estético. «La belleza es la primera prueba: no existe ningún lugar permanente en el mundo para las matemáticas feas», observa el matemático inglés G. H. Hardy. El mismo sentimiento, pero desde el campo de la física teórica, fue expresado por Paul Dirac: «Uno de los rasgos esenciales de la naturaleza parece ser que las leyes físicas fundamentales se describen en términos de una teoría matemática de gran belleza y poder».

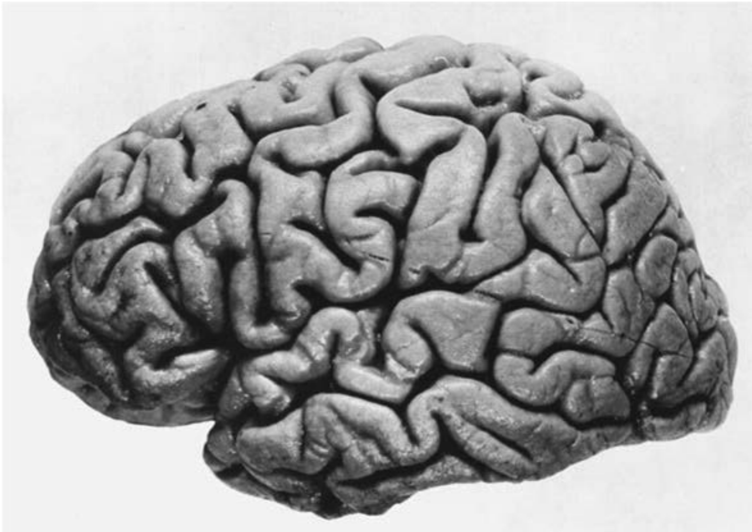
No obstante, la otra cara de la universalidad de las matemáticas es que pueden parecer frías y estériles, desprovistas de pasión y sentimiento. Como resultado podemos encontrarnos con que, aunque los seres inteligentes de otros mundos compartan nuestras mismas matemáticas, estas no sean la mejor forma de comunicarnos con ellos sobre muchas de las cosas que nos importan. «Muchos sugieren el uso de las matemáticas para hablar con los alienígenas», comenta Seth Shostak, investigador del Search for Extraterrestrial Intelligence (SETI). De hecho, el matemático neerlandés Hans Freudenthal desarrolló un lenguaje entero (Lincos) basado en esta idea. «Ahora bien —dice Shostak—, mi opinión personal es que las matemáticas pueden ser un modo arduo de describir ideas tales como *amor* o *democracia.*»

El objetivo último de los científicos, ciertamente de los físicos, es reducir lo que observan en el mundo a una descripción matemática. Los cosmólogos, los físicos de partículas y similares nunca se sienten más felices que cuando han medido y cuantificado cosas, y luego han descubierto una relación entre las cantidades. La idea de que el universo es matemático en su núcleo posee raíces antiguas, que se remontan cuando menos a los pitagóricos. Galileo veía el mundo como un «gran libro» escrito en el lenguaje de las matemáticas, y, mucho más recientemente, en 1960, el físico y matemático húngaro-estadounidense Eugene Wigner escribió un artículo titulado «The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences» [La irrazonable eficacia de las matemáticas en las ciencias naturales].

No vemos los números directamente en el mundo real, por lo que no resulta evidente de inmediato que las matemáticas estén a nuestro alrededor. Pero sí que vemos las formas —la forma cuasi esférica de los planetas y las estrellas, la trayectoria curva de los objetos cuando se lanzan o están en órbita, la simetría de los copos de nieve, y así sucesivamente—, y estas pueden describirse mediante relaciones entre números. Otros patrones, traducibles a las matemáticas, surgen de la forma en que se comportan la electricidad o el magnetismo, rotan las galaxias y actúan los electrones dentro de los confines de los átomos. Estos patrones, y las ecuaciones que los describen, sustentan acontecimientos individuales y parecen representar verdades intemporales y profundas, que subyacen a la complejidad cambiante en la que nos encontramos. El físico alemán Heinrich Hertz, que demostró de manera concluyente por primera vez la existencia de ondas electromagnéticas, observaba: «Es inevitable la sensación de que estas fórmulas matemáticas poseen una existencia independiente y una inteligencia propia, que son más sabias que nosotros, más sabias incluso que sus descubridores, que sacamos de ellas más de lo que fue puesto en ellas originalmente».

Es indiscutiblemente cierto que la base de la ciencia moderna es de naturaleza matemática. Ahora bien, eso no significa necesariamente que la realidad misma sea fundamentalmente matemática. Desde la época de Galileo, la ciencia ha separado lo subjetivo de lo objetivo o mensurable, y se ha centrado en esto último. Ha hecho todo lo posible por desalojar todo lo que tenga algo que ver con el observador y por prestar atención solo a aquello que supuestamente yace más allá de las intromisiones y las influencias del cerebro y los sentidos. La forma en la que se ha desarrollado la ciencia moderna garantiza prácticamente que esta sea de naturaleza matemática. Pero esto deja muchas cosas que la ciencia tiene problemas para abordar, especialmente la conciencia. Puede que algún día dispongamos de un modelo bueno y exhaustivo del funcionamiento del cerebro en lo que atañe a la memoria, el procesamiento visual y demás. Pero la razón por la que tenemos también una experiencia interna, un sentimiento de «lo que significa ser», sigue estando —y tal vez permanezca siempre— fuera del ámbito de la ciencia convencional y, por extensión, de las matemáticas.

Por un lado, los platónicos creen que las matemáticas son un territorio ya existente, a la espera de nuestra exploración. Por otro lado, están aquellos que insisten en que nosotros inventamos las matemáticas conforme avanzamos en la consecución de nuestros propósitos. Ambas posiciones tienen sus puntos débiles. Los platónicos se afanan por explicar dónde pueden estar cosas como pi (π) fuera del universo físico o de la mente inteligente. Los no pla-



¿Por qué ha evolucionado el cerebro humano para ser tan extraordinariamente bueno en un ámbito, las matemáticas, que no necesita para la supervivencia?

tónicos tienen dificultades para negar el hecho de que, por ejemplo, los planetas continuarían orbitando en elipses alrededor del Sol con independencia de que hagamos o no matemáticas. Una tercera escuela de filosofía matemática ocupa una posición intermedia entre las otras dos, y señala que, al describir el mundo real, las matemáticas no tienen tanto éxito como a veces se da a entender. Sí, las ecuaciones son útiles para decirnos cómo dirigir una nave espacial a la Luna o a Marte, o para diseñar un nuevo avión o para predecir el tiempo con varios días de antelación. Pero estas ecuaciones son meras aproximaciones a la realidad de lo que pretenden describir y, además, solo se aplican a una pequeña porción de todas las cosas que acontecen a nuestro alrededor. Al pregonar el éxito de las matemáticas, diría el realista, restamos importancia a la inmensa mayoría de los fenómenos que son demasiado complejos o mal comprendidos para captarlos de forma matemática, o que, por su propia naturaleza, son irreductibles a esta clase de análisis.

¿Es posible que el universo no sea matemático en realidad? Después de todo, el espacio y los objetos que contiene no nos presentan directamente nada matemático. Los humanos racionalizamos y hacemos aproximaciones con el fin de modelizar aspectos del universo. Al hacerlo, las matemáticas nos resultan extremadamente útiles al permitirnos entenderlo. Eso no implica necesariamente que las matemáticas sean algo más que una cómoda creación nuestra. Ahora bien, si las matemáticas no están presentes de entrada en el universo, ¿cómo podemos ser capaces de inventarlas con tal propósito?

Las matemáticas se dividen, a grandes rasgos, en dos áreas: puras y aplicadas. Las matemáticas puras son las matemáticas como un fin en sí mismo. Las matemáticas aplicadas ponen a trabajar sus asuntos en los problemas del mundo real. Pero, con frecuencia, los desarrollos en las matemáticas puras, que aparentemente no guardan relación alguna con nada tangible, se han revelado más tarde sorprendentemente útiles para los científicos y los ingenieros. En 1843, el matemático irlandés William Hamilton fraguó la idea de los cuaterniones, generalizaciones tetradimensionales de números ordinarios sin ningún interés práctico en su momento, pero que, más de un siglo después, han resultado ser una herramienta eficaz en robótica y en gráficos por ordenador y videojuegos. Una cuestión abordada por primera vez por Johannes Kepler en 1611, acerca de la manera más eficiente de empaquetar esferas en el espacio tridimensional, se ha aplicado a la transmisión eficiente de información a través de canales ruidosos. La disciplina matemática más pura, la teoría de números, buena parte de la cual se pensaba que apenas poseía valor práctico, ha conducido a avances importantes en el desarrollo de cifrados seguros. Y la nueva geometría iniciada por Bernhard Riemann, que se ocupaba de las superficies curvas, se reveló ideal para la formulación de la teoría general de la relatividad de Einstein —una nueva teoría de la gravedad—, más de cincuenta años después.

En julio del año 1915, uno de los científicos más grandes de todos los tiempos conoció a uno de los matemáticos más grandes de la época, cuando Albert Einstein visitó a David Hilbert en la

Universidad de Gotinga. El diciembre siguiente, ambos publicaron casi simultáneamente las ecuaciones que describían el campo gravitatorio de la teoría general de Einstein. Pero mientras que las ecuaciones mismas eran el objetivo para Einstein, Hilbert confiaba en que fueran un escalón hacia un plan más ambicioso todavía. La pasión de Hilbert, la fuerza motriz que impulsaba buena parte de su labor, era la búsqueda de los principios fundamentales o axiomas que podrían subyacer a todas las matemáticas. Parte de esta búsqueda, tal como él la concebía, consistía en descubrir un conjunto mínimo de axiomas a partir de los cuales pudiera deducir no solo las ecuaciones de la teoría general de Einstein, sino también cualquier otra teoría física. Kurt Gödel, con sus teoremas de incompletitud, minó la fe en la idea de que las matemáticas pudieran tener las respuestas a todas las preguntas. No obstante, seguimos sin saber con certeza hasta qué punto el mundo en el que vivimos es verdaderamente matemático o solo matemático en apariencia.

Puede que nunca se lleven a la práctica áreas enteras de las matemáticas, más allá de contribuir a abrir nuevas vías de investigación pura. Por otra parte, hasta donde sabemos, es posible que buena parte de las matemáticas puras se represente, de formas inesperadas, en el universo físico, o, si no en este universo, entonces en otros que podrían existir a través de lo que los cosmólogos sospechan que es un multiverso de escala incomprensible. Quizá todo aquello que sea matemáticamente verdadero y válido esté representado en algún lugar, en algún tiempo y de algún modo en la realidad en la que nos hallamos insertos. Por el momento, nuestro viaje nos mantendrá ocupados: la extraña y maravillosa aventura de la mente humana en su exploración incesante de las fronteras del número, el espacio y la razón.

En los capítulos siguientes nos sumergiremos en temas extraños y asombrosos que, al mismo tiempo, tienen conexiones muy reales con el mundo que conocemos. Cierto es que hay partes de las matemáticas que pueden antojarse esotéricas, fantasiosas e incluso carentes de sentido, como un extraño y enrevesado juego de la imaginación. Pero, en su núcleo, las matemáticas son un asunto práctico, enraizado en el comercio, la agricultura y la arquitectura. Aunque se han desarrollado de formas que nuestros antepasados jamás podrían haber soñado, esos vínculos con nuestra vida cotidiana permanecen todavía en su corazón.