Locos por las matemáticas

Ian Stewart

Traducción castellana de
Javier García Sanz

CRÍTICA
Barcelona

Primera edición: febrero de 2005
Primera edición en esta nueva presentación: abril de 2020

Locos por las matemáticas. Pasatiempos y juegos matemáticos
Ian Stewart

Título original: *Math Hysteria. Fun and Games with Mathematics*

Av. Diagonal, 662-664, 08034 Barcelona (España)
Crítica es un sello editorial de Editorial Planeta, S. A.

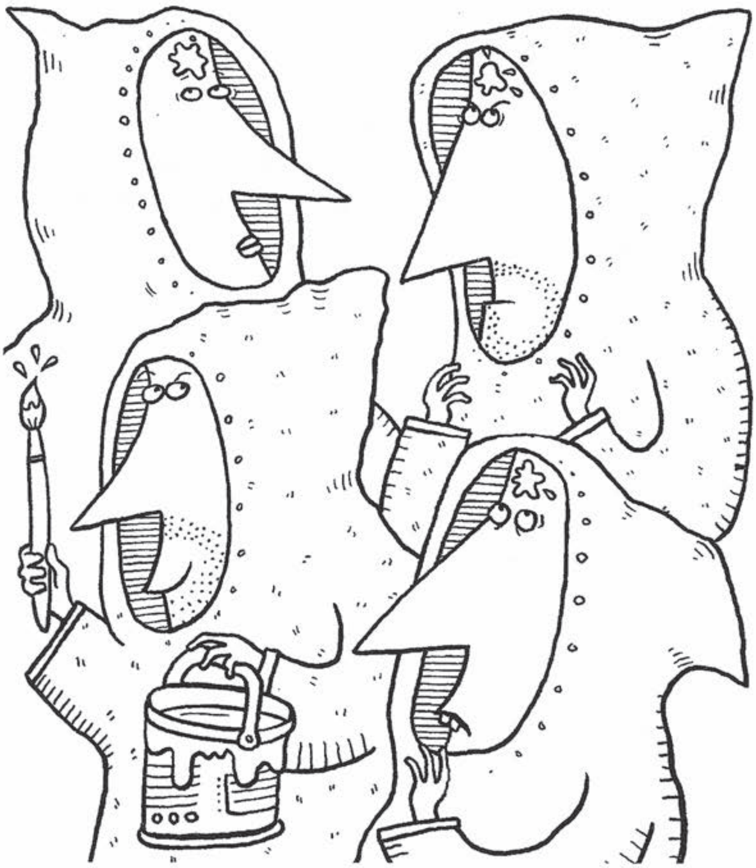
editorial@ed-critica.es
www.ed-critica.es
ISBN: 978-84-9199-212-7
Depósito legal: B. 5.527-2020
2020. Impreso y encuadernado en España.

El papel utilizado para la impresión de este libro está calificado como papel ecológico y
procede de bosques gestionados de manera sostenible.

Índice

1

Yo sé que tú sabes que...



A veces no basta con saber algo: uno tiene que saber que alguien más lo sabe. O que ellos saben que uno sabe que ellos saben que... Estas consideraciones llevan al concepto de «conocimiento común», y ello supone una diferencia. Una vez que algo se ha hecho conocimiento común, se hace posible hacer deducciones sobre el razonamiento de otras personas.

A los extraordinariamente educados monjes de la orden Perplejiana les gusta gastarse bromas lógicas unos a otros. Una noche, cuando los hermanos Archibaldo y Benedicto están dormidos en su celda, el hermano Jonás se introduce sigilosamente y pinta una mancha azul en cada una de sus coronillas tonsuradas. Cuando se despiertan, cada uno de ellos advierte por supuesto la mancha en la cabeza del otro pero, siendo educados, no dicen nada. Cada uno se pregunta si también él tiene una mancha, pero es demasiado educado para preguntarlo a los demás. Entonces, el hermano Zenón, que nunca se ha distinguido por su tacto, entra y empieza a reírse. Al ser preguntado, recupera sus modales y se niega a decir otra cosa que «al menos uno de vosotros tiene una mancha azul en la cabeza».

Por supuesto, los dos monjes saben eso. Pero entonces Archibaldo empieza a pensar. «Yo sé que Benedicto tiene una mancha, pero él no sabe que... ¿Tengo *yo* una mancha? Bien, supongamos que yo *no tengo* una mancha. Entonces Benedicto podría *ver* que yo no tengo una mancha, e inmediatamente deduciría del comentario de Zenón que *él* debe tener una mancha. Pero él no ha manifestado ningún signo de vergüenza... ¡uf!, eso significa que *yo* debo tener una mancha». Y en ese momento Archibaldo empieza a ruborizarse. Benedicto hace lo mismo, justo en el mismo instante y por la misma razón.

Sin el comentario inocente de Zenón no se habría desencadenado ninguna de estas reflexiones pese a que Zenón no les dice nada, aparentemente, que ya no sepan.

Este efecto resulta aún más enigmático cuando lo ensayamos con *tres* monjes. Ahora, los hermanos Archibaldo, Benedicto y Cirilo están dormidos en su celda y Jonás pinta una mancha azul en cada una de sus cabezas. De nuevo, cuando se despiertan, cada uno de ellos advierte las manchas de los demás, pero no dicen nada. Este punto muerto lógico sólo se rompe cuando Zenón deja caer su bomba: «Al menos uno de vosotros tiene una mancha azul en la cabeza».

Bien, eso pone en marcha la reflexión de Archibaldo, y lo que él piensa es esto: «Supongamos que yo no tengo una mancha. Entonces Benedicto ve una mancha en Cirilo, pero no ve nada en mí, y puede preguntarse si *él* tiene una mancha. Y puede razonar de esta forma: "Si yo, Benedicto, no tengo una mancha, entonces Cirilo ve que ni Archibaldo ni Benedicto tienen una mancha, y puede deducir inmediatamente que él mismo tiene una mancha. Puesto que Cirilo, que es un lógico excelente, ha tenido mucho tiempo para deducir esto pero sigue sin sentirse avergonzado, entonces yo, Benedicto, debo tener una mancha". Ahora bien, puesto que Benedicto es también un lógico excelente, y ha tenido mucho tiempo para deducir esto pero sigue sin sentirse avergonzado, entonces se sigue que de hecho yo, Archibaldo, *sí tengo* una mancha». En este momento, Archibaldo se pone colorado —como también lo hacen Benedicto y Cirilo, que han seguido líneas de razonamiento estrechamente similares.

El mismo tipo de argumento funciona con cuatro, cinco o más monjes —suponiendo de nuevo, por el momento, que todos ellos tienen manchas en su cabeza—. Sus deducciones se hacen más enrevesadas pero, por muchos monjes que haya, el anuncio de que «al menos uno de vosotros tiene una mancha» desencadena una serie deductiva que lleva a todos ellos a concluir que tienen una mancha. Cuando los números se hacen grandes es útil tener algún dispositivo de cronometraje para sincronizar sus deliberaciones, así que introduciré este dispositivo dentro de un momento cuando empecemos a desentrañar lo que está pasando. Paradojas similares suceden también si algunos monjes tienen manchas y otros no. Volveré sobre ello.

Hay muchos acertijos de este tipo que incluyen a niños con caras sucias, asistentes a fiestas que llevan sombreros estúpidos, dos personas que están en posesión de números enteros positivos consecutivos pero no saben quién tiene el mayor —incluso una versión menos inocente sobre infidelidad marital entre los miembros de una tribu isleña—. Todos estos acertijos son singularmente desconcertantes, en cuanto que todo el procedimiento es desencadenado por alguien que anuncia un hecho que es perfectamente evidente para todo el mundo. Sin embargo, cuando uno empieza a analizar lo que está pasando se hace claro que el anuncio transmite de hecho nueva información. La informalidad del lenguaje, tan a menudo útil, está en este ejemplo oscureciendo lo que sucede.

Volvamos al primer ejemplo con los dos monjes. Zenón anuncia que «al menos uno de vosotros tiene una mancha azul en la cabeza». ¿Qué saben realmente los monjes? Bien; Archibaldo sabe que Benedicto tiene una mancha, y Benedicto sabe que Archibaldo tiene una mancha. Pero estos hechos no son el mismo. Cuando Archibaldo oye la afirmación de Zenón y concluye que él ya sabía eso, su «alguien» es Benedicto. Pero cuando Benedicto oye la afirmación de Zenón y concluye que él ya sabía eso, su «alguien» es Archibaldo. No es la misma afirmación en absoluto. Lo que hace el anuncio de Zenón no es solamente informar a Archibaldo de que alguno tiene una mancha. También informa a Archibaldo de que Benedicto sabe ahora que alguno tiene una mancha, y es el *mismo* alguno. De modo que la afirmación de Zenón no dice a Archibaldo nada nuevo sobre lo que Archibaldo sabe, pero dice a Archibaldo algo nuevo sobre lo que Benedicto sabe.

Los acertijos lógicos de este tipo se conocen como acertijos de «Conocimiento Común», y todos ellos se basan en el mismo mecanismo. No es el contenido del enunciado lo que importa: es el hecho de que todo el mundo sabe que todos los demás lo saben. Una vez que el hecho se ha convertido en conocimiento común, se hace posible razonar sobre las respuestas al mismo de otras personas.

Volvamos a los monjes. Supongamos ahora que hay 100 monjes, cada uno de ellos con una mancha, cada uno de ellos desconocedor de este hecho, y cada uno de ellos un lógico sorprendentemente rápido. Para sincronizar sus pensamientos, supongamos que el Abad tiene una campana. «Cada diez segundos —dice el Abad—, haré sonar esta campana. Eso os dará mucho tiempo para llevar a cabo el razonamiento lógico necesario. Inmediatamente después de que yo haga sonar la campana, todos aquellos que puedan deducir que tienen una mancha deben levantar la mano». Él espera diez minutos en silencio, salvo por el repetido sonar de su campana, pero nada sucede. «Oh, sí, estúpido de mí, olvidé algo. Aquí hay un elemento extra de información: al menos uno de vosotros tiene una mancha». Ahora nada sucede durante 99 campanadas, y luego los 100 monjes levantan su mano simultáneamente tras el centésimo toque.

En esencia, la lógica va así. El monje número 100, pongamos por caso, puede ver que los otros 99 tienen manchas. «Si yo no tengo una mancha —piensa él—, entonces los otros 99 lo saben. Eso me deja completamente al margen del cálculo. Así que ellos estarán haciendo cualquier serie de deducciones que uno haría con 99 monjes, siempre que yo no tenga una mancha. Si he desentrañado correctamente la lógica de 99 monjes, entonces después de 99 campanadas todos ellos levantarán la mano.» Él espera a la campanada 99, y nada sucede. «¡Ah!, de modo que mi hipótesis es falsa; luego, yo debo tener una mancha.» Campanada 100, arriba la mano. Idem para los otros monjes.

La lógica de 99 monjes (sobre la base hipotética de que el monje 100 está inmaculado) es la misma: ahora el monje 99 espera que los otros 98 levanten la mano en la campanada 98, *a menos* que el monje 99 tenga una mancha. Y así sucesivamente, recursivamente, hasta que finalmente llegamos a un único monje hipotético que no ve ninguna mancha, se sobresalta al descubrir que alguien tiene una, inmediatamente deduce que debe ser *él*, y levanta su mano después de la primera campanada.

Esto es un ejemplo de «inducción matemática», que dice que si una propiedad de los números enteros n es válida cuando $n = 1$, y su validez para n implica su validez para $n + 1$ independientemente de cuál pueda ser n, entonces dicha propiedad debe ser válida para todo n.

Hasta aquí he supuesto que todos los monjes tienen una mancha, pero por un razonamiento similar usted puede convencerse de que esto no es un requisito esencial. Supongamos, por ejemplo, que 68 monjes de los 100 totales tienen manchas. Entonces, con perfecta lógica, nada sucede hasta la campanada 68, en cuyo instante todos los que tienen manchas levantan la mano simultáneamente, pero ninguno de los otros.

Los acertijos de conocimiento común han sido ampliamente investigados, y algunas referencias útiles pueden encontrarse en un artículo de David Gale (ver «Lecturas Adicionales» al final del libro). El ejemplo más matemático allí descrito, y el de mayor alcance, fue ideado por John Conway (Universidad de Princeton) y Michael Paterson (Universidad de Warwick, UK). Imaginemos una fiesta de Matemáticos Locos. Cada asistente lleva un sombrero con un número escrito en el mismo. Dicho número debe ser mayor que o igual a 0, pero no tiene por qué ser un número entero; además, el número de algún jugador debe ser distinto de 0. Colocamos los sombreros de modo que ningún jugador pueda ver su propio número, pero puede ver los de todos los demás.

Ahora llega el «Conocimiento Común». Clavada en la pared hay una lista de números. Uno de ellos es la suma total de los números en los sombreros de los jugadores, pero nadie sabe cuál es el total correcto. Finalmente, suponemos que el número de posibilidades en la lista es menor que o igual al número de jugadores.

Cada diez segundos suena una campana, y quien sepa su número —o sepa la suma total correcta, lo que es equivalente puesto que puede ver los números de todos los demás— *debe* anunciarlo. Conway y Paterson demostraron que, con lógica perfecta, finalmente algún jugador hará un anuncio semejante.

A primera vista, esto es paradójico. Supongamos, por ejemplo, que hay tres jugadores, y el sombrero de cada jugador lleva el número 2, mientras que la lista clavada en la pared contiene los número 6, 7, 8. Cada jugador ve un subtotal de 2 + 2 en los sombreros de los otros jugadores, de modo que el suyo debe ser 2, 3 o 4. Por consiguiente, cada uno de los otros dos jugadores está viendo 2 + 2 o 2 + 3 o 2 + 4, y cualquiera de los totales 6, 7, 8, es posible (recordemos que algunos jugadores, aunque no todos, pueden tener 0 en su sombrero). De modo que ningún total puede descartarse. Sin embargo, gracias a la campana, los jugadores pueden hacer inferencias a partir del hecho de que los otros jugadores todavía no han anunciado que saben su número. En cada toque de campana quedan descartados ciertos conjuntos de números, y esto lleva a la inesperada conclusión de Conway y Paterson.

Para hacerse una idea de lo que está implicado, consideremos sólo dos jugadores, y supongamos que la lista clavada en la pared es 6, 7. Los números en los sombreros no son conocidos, de modo que los llamamos x e y. Lo que ambos jugadores saben es que $x + y = 6$, o $x + y = 7$. Ahora un poco de geometría. Los pares (x, y) que satisfacen estas dos condiciones son las coordenadas de dos segmentos de línea en el cuadrante positivo del plano (figura 1a).

Si x o y es mayor que 6, entonces el juego termina tras la primera campanada porque el otro jugador puede ver inmediatamente que un total de 6 es imposible. Los pares (x, y) para los que esto sucede se muestran en la figura 1b. (Aquí hay que tener un poco de cuidado: los puntos (1,6) y (6,1), que yacen en los extremos de los segmentos marcados, no *son* eliminados. Los segmentos eliminados carecen de un punto extremo, el más próximo al centro de las líneas inclinadas.) Si ningún jugador responde tras la primera campanada, estas posibilidades quedan eliminadas. El juego termina entonces en la segunda campanada si x o y es menor que 1. ¿Por qué? El otro jugador puede ver el sombrero con un número menor que 1, y sabe que su propio número es 6 o menor; por consiguiente el total 7 está descartado. Los pares para los que el juego termina en la segunda campanada se muestran en la figura1c. A medida que continúa esta línea de razonamiento, los pares (x, y) para los que el juego se detiene tras una campanada dada forman diagonales sucesivas de dos «escaleras», una que desciende desde la parte superior izquierda y otra que asciende desde la parte inferior derecha, como se muestra en la figura 1d. Estos segmentos diagonales agotan rápidamente las posibilidades. De hecho, aquí el juego debe detenerse en la octava campanada. (Debido a los «puntos extremos que faltan» que mencioné, los números (3, 3) requieren ocho campanadas. Cualquier otra posibilidad requiere siete o menos.)

El mismo tipo de argumento da cuenta de cualquier lista de dos jugadores, e incluso nos calcula el número máximo de campanadas requerido. La demostración para más jugadores es muy simple, aunque matemáticamente sofisticada; el artículo de Gale contiene todos los detalles. Como desafío, calcule lo que sucede con tres jugadores, cada uno de los cuales lleva el número 2 en su sombrero, y la lista 6, 7, 8, tal como se mencionó antes. Usted debería encontrar que nada sucede durante 14 campanadas, y luego los tres jugadores anuncian sus números en la décimoquinta.

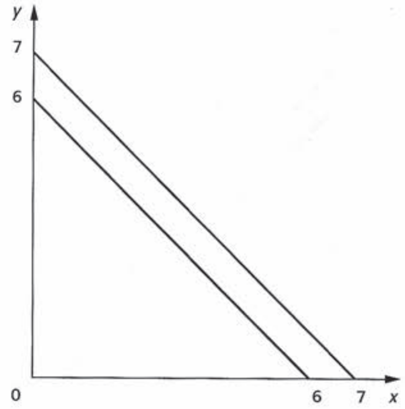


FIGURA 1a. Dos segmentos de línea corresponden a números posibles en los sombreros.

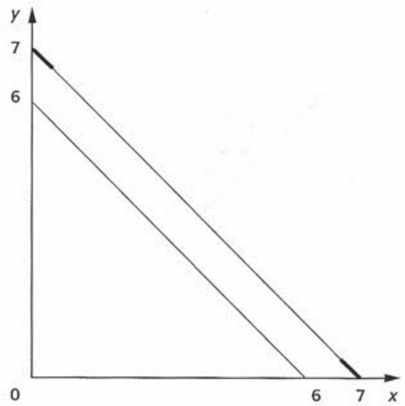


FIGURA 1b. Si los números caen en los segmentos señalados por líneas gruesas, el juego termina en la primera campanada.

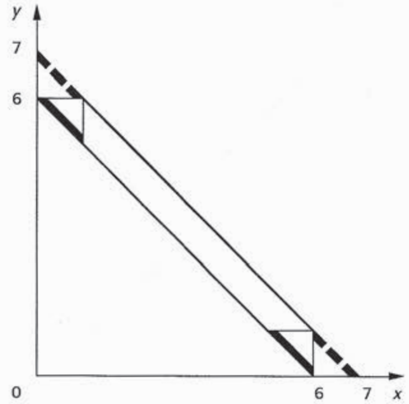


FIGURA 1c. Si los números caen en estos segmentos, el juego termina en la segunda campanada.

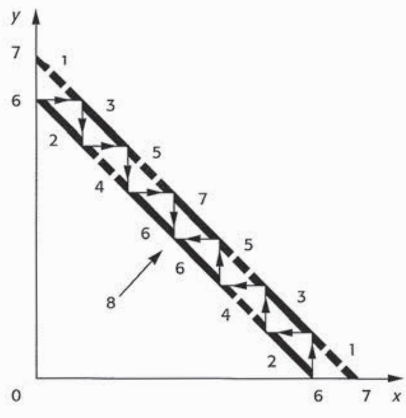
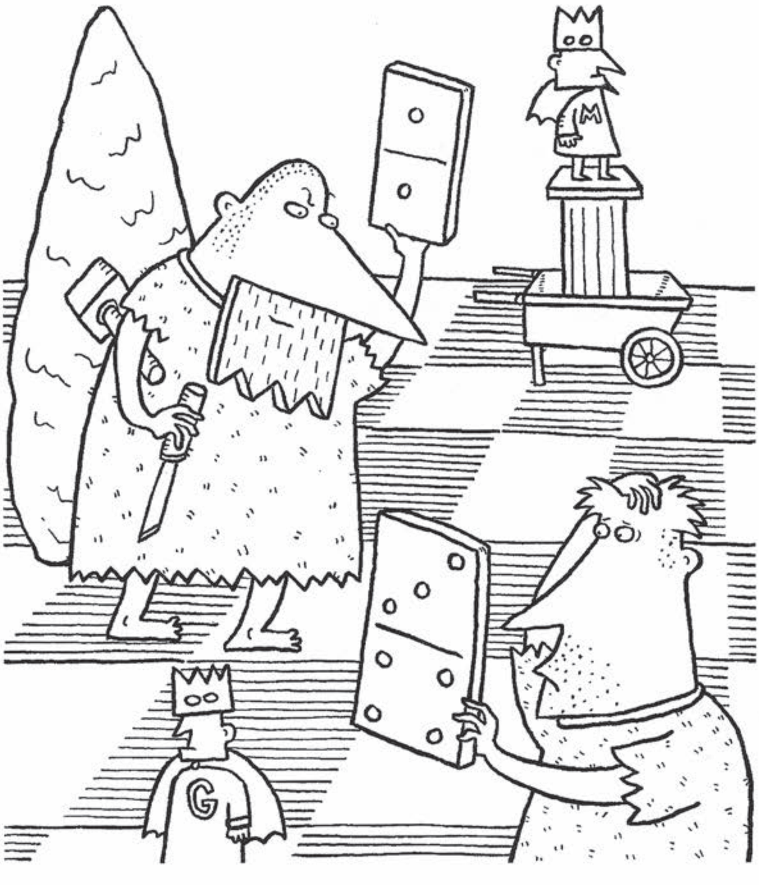


FIGURA 1d. Continuando a lo largo de dos «escaleras» entre las líneas, encontramos cuánto tiempo continúa el juego para cualquier par de números (el número necesario de campanadas está marcado en los segmentos apropiados; cada segmento carece del punto extremo que yace más próximo al centro de las líneas inclinadas). Aquí, el número más alto de campanadas necesarias es ocho.

2

Teorías del dominó



Por muchas veces que uno intente algo y fracase, eso no significa que sea imposible. Sólo demuestra que uno no sabe cómo hacerlo. Para demostrar que algo es imposible, uno tiene que descartar todas las tentativas de solución. Una buena manera de hacerlo es encontrar un obstáculo imposible de evitar: un «invariante». A veces se puede encontrar un invariante introduciendo algunos colores, y contando.