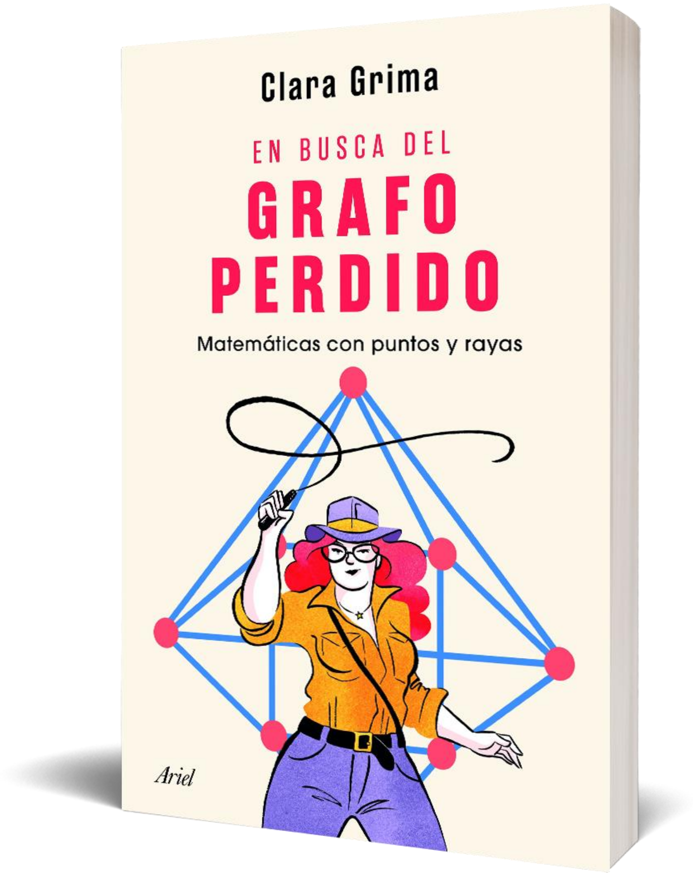
Ariel

Clara Grima



EN BUSCA DEL GRAFO PERDIDO

Matemáticas con puntos y rayas

Ilustraciones de Raquel Gu

Esto es un libro sobre grafos.
¿Qué son los grafos?

A LA VENTA EL 24 DE NOVIEMBRE
AUTOR DISPONIBLE PARA ENTREVISTAS

PARA AMPLIAR INFORMACIÓN, CONTACTAR CON:
Itziar Prieto (Responsable de Comunicación Área Ensayo)
659 45 41 80/ iprieto@planeta.es

SINOPSIS

A simple vista se podría pensar que son dibujos sencillos realizados a partir de puntos y rayas que se unen entre sí. Pero si nos acercamos un poco más y los observamos con cariño y paciencia, descubriremos que son unos objetos matemáticos fascinantes, con un sinfín de aplicaciones sorprendentes, que sirven para analizar las redes sociales, diseñar una liga de fútbol u organizar un banquete de boda. Y siempre de la forma más eficiente y divertida.

Esta sorprendente obra nos revela, a través de ejemplos llamativos e inesperados, cómo estas herramientas, en apariencia muy simples, tienen un potencial impresionante para modelar y resolver de manera óptima situaciones o conflictos cotidianos. Para aprender sobre grafos solo hay que ser curioso y saber usar algo en lo que, de momento, no nos ganan los ordenadores: intuición y sentido común. Además, tampoco hace falta tener conocimientos matemáticos previos. Si sabes cuándo un número es par, podrás llegar hasta el final de este libro y disfrutar de la Teoría de Grafos como un niño.

LA AUTORA

Clara Grima es doctora en Matemáticas y profesora titular de Matemática Aplicada en la Universidad de Sevilla. Desde 2010 compagina su labor docente e investigadora con la divulgación científica en diferentes medios y programas de radio y televisión. Merecedora del Premio COSCE 2017 por su trayectoria y el Premio ROMA en la categoría Mujer STEM en 2019 por su labor como divulgadora, imparte cientos de charlas al año y está convencida de que a todo el mundo le gustan las matemáticas aunque algunos todavía no lo sepan. En Ariel ha publicado *¡Que las matemáticas te acompañen!*

Segunda mujer española de la historia invitada al Congreso Internacional de Matemáticas

EXTRACTOS DE LA OBRA

INTRODUCCIÓN

«Este es un libro sobre grafos. ¿Qué son grafos? A simple vista se podría pensar que un grafo es un dibujo simple realizado a partir de puntos y rayitas que unen a algunos de estos puntos por parejas. Pero si nos acercamos un poco más y los observamos con cariño y paciencia, los grafos son unos objetos matemáticos fascinantes con un sinfín de aplicaciones sorprendentes. Sirven para analizar las redes sociales, diseñar una liga de fútbol u organizar un banquete de boda. Y siempre de la forma más eficiente. Y divertida.

En este libro pretendemos mostrar cómo estas herramientas, en apariencia muy sencillas, tienen un potencial impresionante para modelar situaciones y conflictos cotidianos y resolverlos de forma óptima. Solo hay que ser curioso y saber usar algo en lo que, de momento, no nos ganan los ordenadores: intuición y sentido común.

Además, los conocimientos matemáticos previos necesarios para aprender sobre grafos son: ninguno. Solo necesitas saber leer y, bueno, saber detectar si un número es par. Vamos a empezar desde el principio y caminaremos, a través de ejemplos llamativos e inesperados, hasta el final de este libro para conseguir hacernos una idea y, sobre todo, disfrutar como niños de la Teoría de Grafos.

¿Por qué o para qué un libro solo de grafos? Porque aunque la Teoría de Grafos no es nueva, ni mucho menos —comenzó con puentes (aunque no sobre el río Kwai sino sobre el Pregolia) allá por el siglo XVIII—, el auge de las redes sociales virtuales la ha puesto cada vez más en escena por ser fundamental para analizar las dinámicas de dichas redes.

Pero no solo eso. La necesidad, cada vez más imperiosa, de cualquier país de formar a más gente en matemáticas avanzadas para satisfacer la demanda de estos profesionales en los sectores más robustos y potentes pone de manifiesto la urgencia de actualizar los contenidos matemáticos para nuestros estudiantes preuniversitarios. Y, sobre todo, la urgencia de detectar talentos matemáticos entre nuestros jóvenes atrayéndolos a esa maravillosa disciplina que son las matemáticas. Y en esta tarea entiendo, basándome en mi experiencia profesional, que trabajar con grafos acerca a nuestros niños y niñas a lo que son, de verdad, las matemáticas: un trabajo de investigación. Nunca un cuaderno lleno de cuentas.

Por otra parte, no hay ningún libro de Teoría de Grafos en castellano como este, ningún manual que permita a docentes y estudiantes acercarse a estos objetos matemáticos a través de ejemplos cotidianos, sin necesidad de los detalles técnicos que suelen encontrarse en los libros introductorios sobre la materia.

Mi experiencia de más de diez años como divulgadora y popularizadora de las matemáticas me ha demostrado, no pocas veces, que los grafos son apreciados por el público general desde el primer momento porque pueden entenderse y usarse sin necesidad de conocimientos previos avanzados de matemáticas.

Puedo afirmar —y afirmo— que cualquier lector, de cualquier edad, disfrutará y aprenderá de esta forma de hacer matemáticas sin cuentas, solo con puntos y rayas.»

EL GUATEQUE

«Como habrás leído en la introducción (así lo espero, porque me la he currado mucho), este es un libro sobre grafos. Más adelante daremos una definición formal de estos objetos, pero por ahora vamos a pensar que un grafo es un objeto matemático formado por dos conjuntos. El primer conjunto lo forman unos elementos que llamaremos vértices o nodos y que representaremos con puntos. Los elementos del segundo conjunto son parejas formadas con dos elementos del primero según alguna propiedad que definamos; a estas parejas les llamaremos aristas y las representaremos con un segmento (una raya) que une los dos puntos correspondientes a los miembros de dicha pareja.»

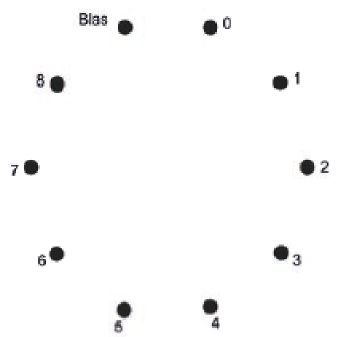
«Estos objetos, los grafos, tan monos y en apariencia tan simples, nos proporcionan unas herramientas matemáticas muy potentes para resolver problemas reales de gran complejidad y con infinidad de aplicaciones. Como estamos empezando este libro y quiero que me acompañes hasta el final para que no te pierdas la oportunidad de descubrir la belleza de la Teoría de Grafos, vamos a comenzar con un ejemplo simple de aplicación de grafos para resolver un acertijo que, espero, podrás compartir con amigos y familiares cuando la conversación se torne tensa sobre algún tema espinoso.

Alicia y Blas son pareja y han quedado para cenar con otras cuatro parejas en un restaurante. Al llegar a la cena, todos llegan con su pareja y los asistentes se saludan al verse: algunos se dan cordialmente la mano, otros se saludan con dos besos. Tras los postres, Blas propone a sus nueve compañeros de mesa que escriban en un trocito de papel a cuántas personas les dieron la mano al llegar al restaurante. Recordemos que todos se saludaron, pero usaron dos tipos de saludo: mano o besos. Los compañeros acceden y le dan a Blas los nueve papelitos, cada uno con un número: el número de personas a las que saludaron con un apretón de manos al llegar. Blas, sin abrirlos, los mezcla y después los abre y los coloca sobre la mesa. Casualmente, las nueve respuestas son distintas, no se repite ningún número. La pregunta que te hago es la siguiente: ¿a cuánta gente le dio la mano Alicia al llegar?

Lo sé. En principio podría parecer que es algo imposible de saber a partir de los datos de que disponemos, pero no. Está todo escrito en el párrafo anterior. Solo se trata de «exprimir» toda la información que poseemos, de ensamblar como detectives todas las pistas que tenemos para responder a la pregunta. Y, claro, de usar un grafo, porque aquí hemos venido a hablar de grafos.

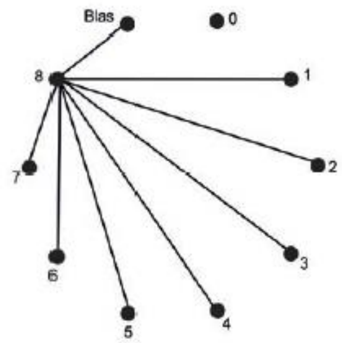
La primera pista que tenemos es que las nueve respuestas eran diferentes. Intentemos adivinar cuáles fueron esas respuestas. ¿Pudo alguien escribir, no sé, 11 en su trocito de papel? Evidentemente no, porque eran solo 10 amigos. Por lo tanto, el número más alto que podría aparecer en esos papelitos es el 9. ¿Y el más pequeño? Podemos deducir sin dificultad que el más pequeño puede ser 0, que correspondería a una persona que saludó a todos con dos besos. Luego, en principio, las respuestas posibles serían {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Esas son 10 posibles respuestas, pero solo tenemos 9 papelitos. Un momento: leamos de nuevo el acertijo. Llegaron en pareja. Eso signi.ca que, al verse, como máximo saludaron a 8 personas. Nadie saluda a su pareja al llegar si viene con ella: la trae saludada de casa. O no. Pero, desde luego, no la saluda si llega con ella. Este pequeño detalle nos viene muy bien porque reduce el conjunto de respuestas posibles a {0,1,2,3,4,5,6,7,8}, o sea, ya sabemos qué números había en los papelitos.

Ahora vamos a plasmar esta información en un grafo. Los vértices serán 10, uno por cada asistente. Solo tenemos identificado a Blas; al resto lo etiquetamos con uno de los números que aparecen en los trocitos de papel. Se trata, pues, de averiguar detrás de qué número se encuentra Alicia.



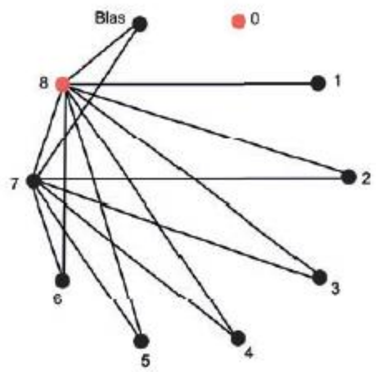
Ahora vamos a dibujar las aristas del grafo. Estas aristas unirán dos vértices entre sí si se dieron la mano. Por lo tanto, salvo para el vértice que corresponde a Blas, sabemos cuántas aristas saldrán de cada uno de los otros 9 vértices: del 0 no saldrá ninguna, del 1 saldrá una, etc.

Comencemos a pintar estas aristas colocando en primer lugar las que salen del vértice 8. Tienen que salir 8 aristas a 8 vértices y, sin contar el vértice 8, nos quedan 9. Pero bueno, sabemos que al 0 no llega ninguna, y ya lo tenemos: el 8 les dio la mano a todos menos al 0.

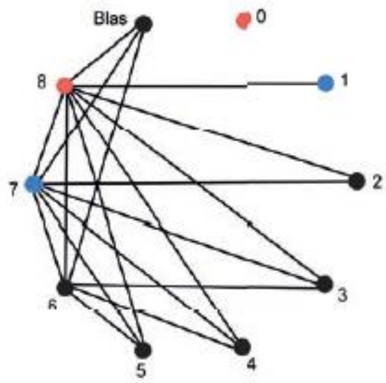


¿Qué podemos deducir del hecho de que el 8 saludara a todos menos al 0 con un apretón de manos? Efectivamente, que el 8 y el 0 son pareja. La pareja del 8 es una de las personas a las que no le dio la mano, y la única opción es el 0. ¡Ea!, pues ya tenemos identificada a una de las parejas y a dos sospechosos menos de ser Alicia.

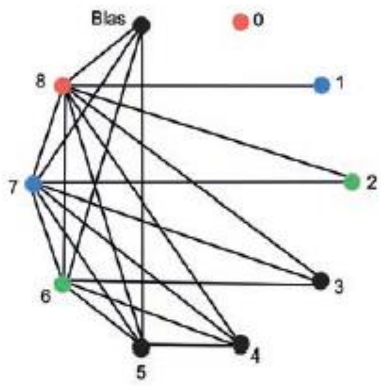
Seguimos ahora con el vértice 7, del que tienen que salir 7 aristas. Lo tenemos fácil, porque quitando al 0 y al 1, que ya no pueden recibir más aristas, nos quedan 7 candidatos para ser saludados con un apretón de manos por el 7. A uno de ellos ya lo habíamos unido, al 8.



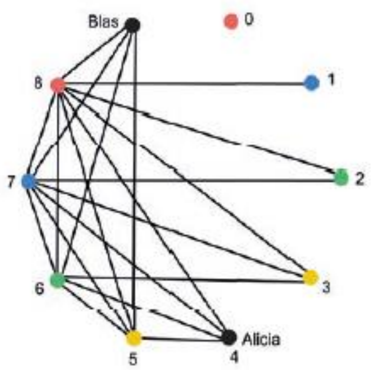
Como la pareja del 7 está entre las personas a las que este vértice no les dio la mano y el 7 se la dio a todas menos al 0 y al 1, podemos deducir que 1 y 7 son pareja. El 0 es la pareja del 8. Pues nada, dos sospechosos menos de ser Alicia. Seguimos con el 6 y repetimos el proceso: el 6 se podrá unir con todos menos con el 0, el 1 y el 2, porque estos tres ya tienen dibujadas las aristas que les corresponden.



Al igual que en los casos anteriores, como la pareja del vértice 6 se encuentra entre los vértices a los que no les dio la mano, la única opción es el 2. Tenemos identificada una nueva pareja y hemos eliminado a dos nuevos sospechosos, el 2 y el 6. Aunque supongo que ya intuyes quién es Alicia, vamos a terminar de dibujar nuestro grafo añadiendo las aristas que salen del 5 y que pueden unirlo a todos los vértices menos al 0, al 1, al 2 y al 3, porque estos ya tienen las aristas que les corresponden.



Pues ya lo tenemos: el 5 es la pareja del 3, es el único libre de entre todos los que no saludó con un apretón de manos y, por lo tanto, ya hemos desenmascarado a Alicia. Estaba escondida en el vértice 4 y dio la mano a 4 personas al llegar.



Sorprendente, ¿no? Un rompecabezas que en principio parecía muy complicado y que se resuelve de forma simple, y sobre todo muy elegante, sin más que modelar la situación usando un grafo. Bueno, ya te prometí que los grafos son una herramienta muy potente para eso: modelar y resolver problemas de manera eficiente e intuitiva.»

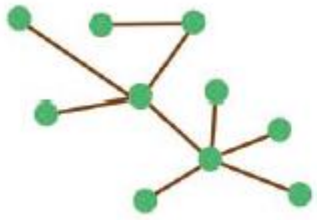
UN MONSTRUO VIENE A VERME

«Dice Joaquín Araújo, naturalista, que "cada árbol en pie es un punto de apoyo para esta lisiada humanidad". Este no es un libro de filosofía, es un libro sobre grafos, pero también nos apoyamos en los árboles y en su sabiduría para resolver situaciones cotidianas de una forma tan audaz como elegante.»

«Tener un hijo, plantar un árbol y escribir un libro. Eso es lo que la cultura popular nos recomienda hacer en la vida para sentirnos "realizados". […]

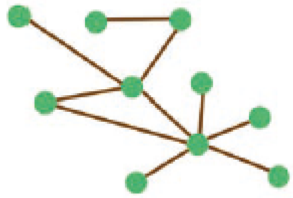
Dejemos los hijos y los libros a un lado, por el momento. Bueno, este no, no lo dejes ahora, que te voy a contar cosas muy chulas. Vamos a centrarnos en los árboles. Porque, como en la película que da nombre a este capítulo, llegan de visita a "esta casa" unos monstruos […] que nos van a ayudar a resolver algunos problemas en grafos Y sí, como en la película, estos monstruos adorables serán árboles.

Para ello vamos a definir qué es un árbol (en Teoría de Grafos, claro). Un **árbol** es un grafo conexo que no tiene ciclos. Conexo ya sabemos lo que significa […]: que entre dos vértices cualesquiera podemos encontrar un camino de aristas que los unen. Y que no tiene ciclos es eso, que no podemos encontrar ningún camino de aristas en el grafo que salga de un vértice y vuelva a él. […]

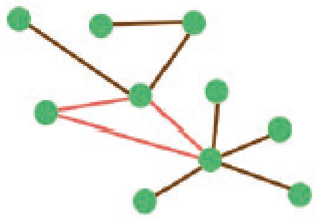


Puedes comprobar que entre cualquier pareja de vértices existe un camino de aristas que los une (es conexo) y que no hay ciclos.

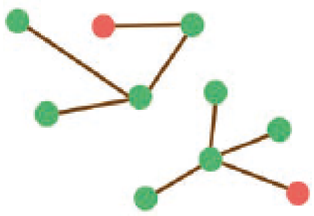
El siguiente grafo no es un árbol. ¿Por qué?



Efectivamente, porque contiene un ciclo. Lo hemos marcado en rojo en la siguiente figura.

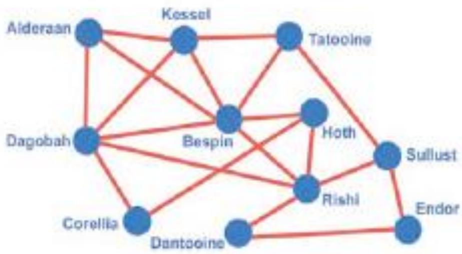


[...] La siguiente figura tampoco representa un árbol. En esta ocasión lo que falla es la condición de ser conexo.

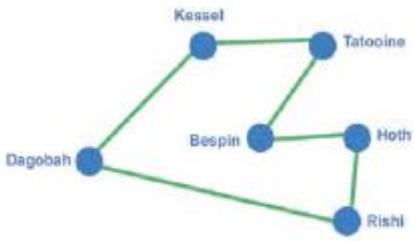


Se ve sin dificultad que el grafo no es conexo porque, por ejemplo, no existe ningún camino de aristas que una los dos vértices que hemos marcado en rojo. Pero como es un grafo sin ciclos decimos que es un **bosque**, y cada de una de las componentes conexas de este bosque (2 en nuestro ejemplo) será eso, conexa y sin ciclos. Por lo tanto, las componentes conexas de un bosque son siempre árboles; dicho de otra manera, los bosques están formados por árboles. No te esperabas esta sorpresa en el guion, ¿verdad?

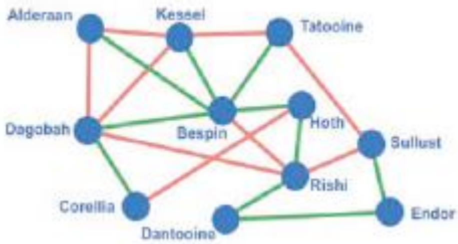
[…] Imagina que en una determinada zona geográ.ca un temporal ha inutilizado todas las carreteras de la red que comunicaba entre sí a los municipios de la zona. Imagina que, antes del temporal, la red de carreteras de la zona tenía esta pinta.



Como medida de emergencia, lo primordial es conectar a las poblaciones para que ninguna quede aislada del resto. Dicho en término de grafos, ahora que somos ya casi expertos, construir un grafo conexo que pase por esos vértices. Como las carreteras originales (las que aparecen representadas en rojo en la ilustración anterior) están destrozadas pero el terreno estaba acondicionado para ellas, vamos a reponer las que sea preciso para conseguir eso, un grafo conexo que conecte todas las ciudades. Al tratarse de una situación de emergencia, vamos a reparar el menor número de carreteras necesarias para restablecer la conexión, y esto se traduce en que el grafo conexo que estamos buscando no debe tener ciclos porque, al fin y al cabo, si tengo un ciclo en dicho grafo puedo eliminar cualquiera de las carreteras que lo componen y las ciudades seguirán conectadas.

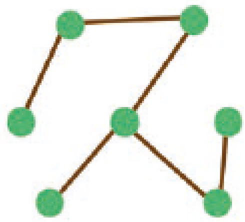


Recapitulemos un poco. Queremos un grafo conexo (para que ninguna ciudad se quede aislada) y que no tenga ciclos. Eso es, precisamente, un árbol. Como queremos usar las aristas del grafo original (es decir, reconstruir carreteras existentes, no construir carreteras nuevas), lo que queremos se conoce como un árbol recubridor del grafo. Llamamos **árbol recubridor de un grafo** a un árbol que pasa por todos los vértices de dicho grafo y usa aristas del mismo. Por ejemplo, el que mostramos a continuación señalado en verde: […]



Fijémonos en los dos árboles recubridores de carreteras que aparecen en las dos ilustraciones anteriores. ¿Qué tienen en común?

Eso es, que los dos usan 10 aristas. En los dos casos habría que reconstruir 10 carreteras. Curioso, ¿no? Busca un papel, dibuja, no sé, 7 vértices (7 puntitos) y un árbol que pase por ellos. Mientras lo haces, yo también voy a dibujar el mío.»

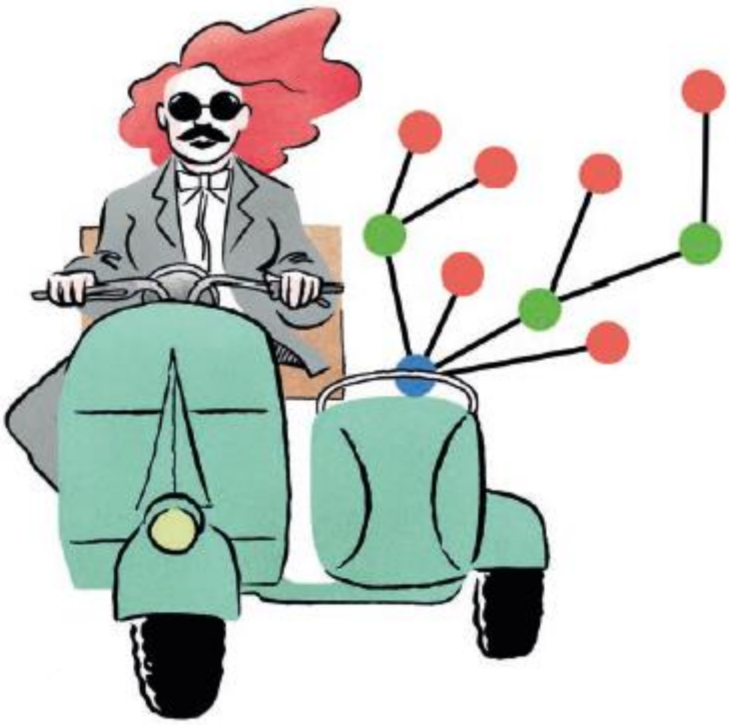


Yo lo he conseguido con 6 aristas, ¿y tú? Ya lo sé, también con 6. Es una propiedad de los árboles: el número de aristas de cualquier árbol es igual al número de vértices menos uno.»

AMANECE, QUE NO ES POCO

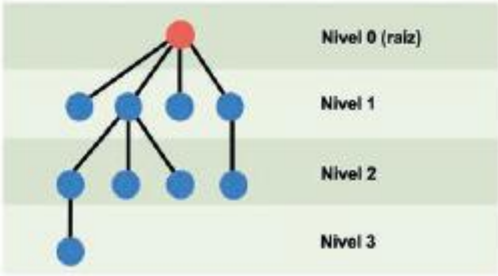
«[…] te voy a presentar un tipo especial de árboles que, entre otras muchísimas aplicaciones (desde economía hasta inteligencia artificial), se suelen usar para resolver los clásicos acertijos de monedas falsas con las consiguientes pesadas.

Me refiero a los árboles de decisión. Este tipo de árboles se suelen utilizar muchas veces para analizar cuánto y cuáles son las posibles consecuencias de una acción y decidir a la vista de las mismas. Son siempre árboles enraizados en un vértice destacado. El vértice raíz en el que tomamos la primera decisión.



En el árbol de la figura la **raíz** es el vértice azul. A los vértices del árbol de valencia[1]1 (con una sola arista) les llamamos **hojas** (en rojo en la figura anterior), y al resto (en verde), **vértices internos** del árbol enraizado. Como hacíamos en el

[…] en un árbol enraizado podemos clasificar sus vértices en niveles, que dependerán de la distancia a la raíz.



Cuando nuestro árbol es un árbol de decisión, cada uno de los nodos internos representa eso, una decisión. Si la decisión es binaria, de cada vértice interno saldrán, hacia el siguiente nivel, dos aristas, una por cada posible resultado. En este caso, el árbol se llama **árbol binario**. Si la decisión tiene 3 posibles resultados (por ejemplo, una comparación: mayor, menor o igual), de cada vértice interno saldrán hacia el siguiente nivel tres aristas y el árbol se llamará **árbol ternario**. Y así sucesivamente. Cuando todas las hojas del árbol están al mismo nivel, se llama árbol **completo**.»

GREASE

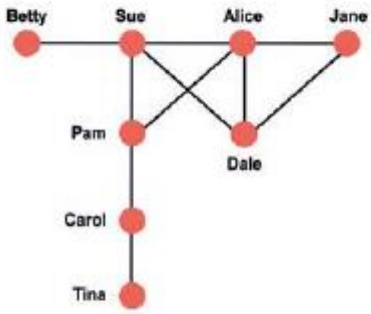
«¿Cómo destacar en un mundo globalizado en el que todos cada vez nos parecemos más, llevamos casi la misma ropa, escuchamos la misma música y comemos las mismas cosas? ¿Cómo se puede llegar a ser un *influencer*? Está complicado, ya te aviso, pero te decimos qué cuentas tienes que hacer para saber si ya lo eres. Y si no, tampoco pasa nada; la mayoría no lo somos.»

«[…] Supongo que no te llevarás las manos a la cabeza ni dudarás de mi integridad mental si afirmo que las redes sociales virtuales han supuesto un cambio de paradigma en la comunicación y, sobre todo, en el comportamiento humano y en nuestras relaciones sociales.»

«[…] Sin entrar en el análisis exhaustivo de la información que obtenemos de las redes sociales, entre otras cosas, porque escapa de los objetivos de este libro y del área de la Teoría de Grafos (hay muchas disciplinas implicadas), vamos a analizar algunos fenómenos que han estado presentes desde siempre en nuestras relaciones sociales pero que, gracias al auge de las redes sociales virtuales, tenemos capacidad para analizar.

Comenzaremos dándonos un pequeño baño de humildad: tus amigos tienen más amigos que tú. Lo siento. No es una opinión. Es un teorema. Si te sirve de consuelo, mis amigos también tienen más amigos que yo. Nos pasa a casi todos. Menos a los *influencers*, claro.

Fue el sociólogo matemático Scott L. Feld quien en 1991 bautizó como **paradoja de la amistad** al hecho, detectado en distintas comunidades, de que la mayoría de la gente tiene menos amigos en promedio que sus amigos. […] Uno de los ejemplos que Feld extrajo del trabajo de Coleman y que nos servirá para explicar la paradoja de la amistad lo tienes en la siguiente ilustración, referida a 8 estudiantes de uno de los citados institutos. Los nombres son ficticios.



Si analizamos los datos de amistad en el grafo de la figura y los presentamos en una tabla tendremos:

	Número de amigos	Número total de amigos de sus amigos	Media de amigos de sus amigos
Betty	1	4	4
Sue	4	11	2,75
Alice	4	12	3
Jane	2	7	3,5
Pam	3	10	3,3
Dale	3	10	3,3
Carol	2	4	2
Tina	1	2	2

Si nos fijamos en la tabla, solo 2 de ellas, Alice y Sue, tienen más amigos que la media de amigos de sus amigos; una, Carol, tiene exactamente el mismo número de amigos que la media de sus amigos, y las otras 5 están por debajo. Por lo tanto, el número de alumnas que tienen menos amigas que la media es más del doble del de las que están por encima. En el estudio completo sobre este instituto, en el trabajo de Coleman, de las 146 chicas que participaron, 80 estaban por debajo de la media de sus amigas, 41 por encima y 25 tenían tantas amigas como la media. O sea, que en el conjunto general el número de estudiantes con menos amigas que la media de sus amigos era casi el doble que el de estudiantes con más amigas que la media.

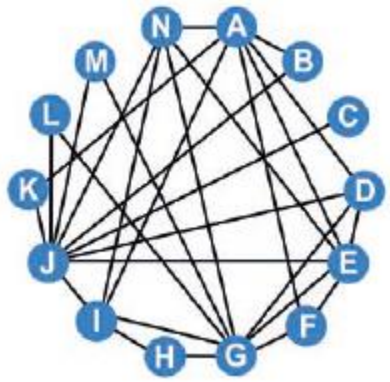
Este efecto que se produce en este ejemplo podría parecer puntual o casual, pero no, **es un efecto que se detecta en todas las redes sociales, reales o no**. En el caso de las comunidades reales (no virtuales), cuantificar la paradoja de la amistad es cuando menos dificultoso, puesto que se haría necesaria una encuesta entre todos los miembros de dicha comunidad para identificar los enlaces. Pero en el caso de las redes sociales se dispone de esos datos de amistad sin necesidad de realizar encuestas.»

«El efecto de la paradoja de la amistad estudiado por Feld está relacionado con el número de aristas (amigos) que cada vértice (individuo) tiene en la red, pero en principio solo tendría que afectar a eso, que el número de amigos de tus amigos sea mayor que el tuyo.

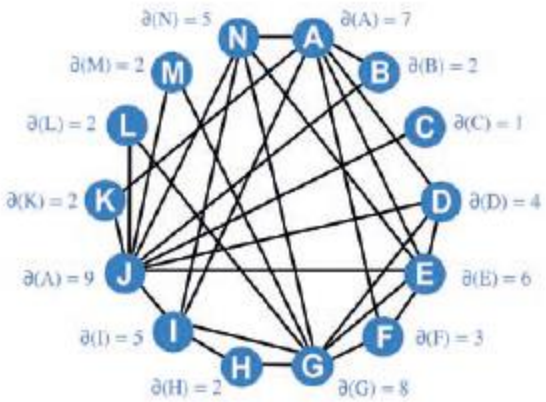
Sin embargo, al estudiar el fenómeno en otras redes, por ejemplo académicas, si contamos los coautores de cualquier cientí.co, sus coautores tendrán más coautores que él. Pero, curiosamente, también tendrán más publicaciones y más citas.

Este efecto se conoce como la **paradoja de la amistad generalizada**, y se puede analizar matemáticamente en qué condiciones se da. […]»

«Vamos a analizar un ejemplo simple de una red social pequeñita, solo de 14 puntos. Y lo haremos porque en el siguiente capítulo estudiaremos otro fenómeno muy interesante que también sufrimos en nuestras redes sociales, reales y virtuales. Este es el grafo que usaron los investigadores que la presentaron formalmente por primera vez. Hasta donde yo sé, claro.



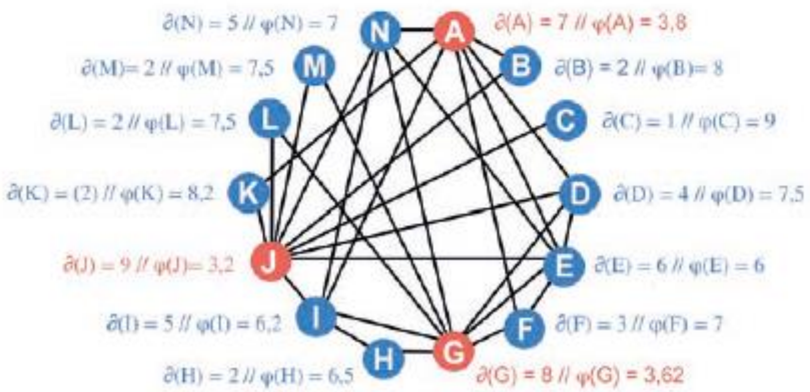
Cada uno de los vértices representa a un individuo de una red social (como hemos dicho, real o virtual; puede ser una comunidad de vecinos o Facebook) y las aristas unen por parejas a los individuos que son amigos, que están en contacto. La valencia de cada vértice nos indica el número de amigos que tiene cada individuo. Las hemos puesto en la imagen siguiente.



Ahora, para cada vértice, calculamos la media de amigos de sus amigos. Sí, como hizo Feld. Llamaremos ***φ***(*V*) a la media de amigos de los amigos del vértice ***V***. Por ejemplo, ***A*** tiene 7 amigos: ***B***, ***D***, ***E***, ***F***, ***I***, ***K*** y ***N***. Por lo tanto:

$$\varphi(A) = \frac{\delta(B) + \delta(D) + \delta(E) + \delta(F) + \delta(I) + \delta(K) + \delta(N)}{7} = \frac{27}{7} = 3,8$$

Si lo hacemos con cada vértice, nos quedan los siguientes resultados:



Solo 3 de los 14 individuos (los hemos marcado en rojo) tienen más amigos que la media de sus amigos. Solo 3 de ellos no están afectados por la paradoja de la amistad. ¿Qué influencia puede tener este hecho sobre nosotros, los mindundis? ¡Huy!, muchísima más de lo que mucha gente espera. […]»

EL SEÑOR DE LOS ANILLOS

«[…] independientemente de todas las medidas de relevancia que haya y que habrá para medir la importancia de un individuo (o *individua*) en una red social, para mí el más importante o la más importante ahora mismo eres tú. Por haber estado ahí, del otro lado. Sin ti este libro nunca podría haber existido. Sin ti este libro no sirve para nada.

Espero que hayas disfrutado de esta visita guiada al país de las maravillas, al maravilloso mundo de la Teoría de Grafos. Quedan muchas más cosas por aprender, incluso mucho por profundizar, en los temas que aparecen en este mi primer libro de Teoría de Grafos. De la acogida de este libro dependerá que haya una segunda parte, claro. Así que, si te gusta, compártelo. Y si no te ha gustado, por favor, prueba con otros libros de otros autores. Nunca dejes de aprender matemáticas. Lo dejamos por aquí. Hasta pronto.»

SUMARIO

Ariel

Para ampliar información, contactar con:
Itziar Prieto (Responsable de Comunicación Área Ensayo)
659 45 41 80/ iprieto@planeta.es